GEOMETRÍA ANALÍTICA

para ciencias e ingenierías

ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE

Silvia **RAICHMAN** . Eduardo **TOTTER** . Daniel **VIDELA**
Liliana **COLLADO** . Florencia **CODINA**
Gabriel **MOLINA** . Adrián **CASCONE** . Gisela **FITT**

Geometría Analítica

para Ciencias e Ingenierías

ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE

…………………………….
Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías: *Actividades para el Aprendizaje* / ………….. - 1a ed. ilustrada. - Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo, 2020.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN: en trámite.

1. Geometría Analítica. I. ………… II. Título
CDD …………………

Mendoza, República Argentina, febrero de 2020.

Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías
Actividades para el Aprendizaje

EDICIÓN DIGITAL


Silvia
RAICHMAN

Ingeniera Civil, Magister en Ingeniería Estructural y Especialista en Docencia Universitaria.
Profesora Titular de las asignaturas *Geometría Analítica* y *Matemática Avanzada*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería. Facultad Ciencias Exactas y Naturales.
Profesora Titular de la asignatura *Cálculo Avanzado*, Departamento de Ingeniería Civil.
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Mendoza.


Eduardo
TOTTER

Ingeniero Civil, Magister en Ingeniería Estructural.
Profesor Adjunto de las asignaturas *Geometría Analítica*, *Matemática Avanzada* y *Construcciones Metálicas y de Madera*. Profesor a cargo de la asignatura *Diseño Estructural I*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería.
Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Cálculo Avanzado,* Departamento de Ingeniería Civil.
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Mendoza.


Daniel
VIDELA

Ingeniero Civil.
Profesor Adjunto de la asignatura *Geometría Analítica*.
Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Construcciones y Montajes Industriales*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería.


Liliana
COLLADO

Profesora de Matemática, Física y Cosmografía.
Jefe de Trabajos Prácticos de las asignaturas *Geometría Analítica* y *Matemática* para *Arquitectura*. Coordinadora del Área Matemática del Ingreso.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería.


Florencia
CODINA

Ingeniera Industrial.
Jefe de Trabajos Prácticos de las asignaturas *Geometría Analítica* y *Cálculo I*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería. Facultad Ciencias Exactas y Naturales.


Gabriel
MOLINA

Ingeniero Civil. Master en Ingeniería Mecánica y Civil.
Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Geometría Analítica*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería.


Ignacio
CASCONE

Ingeniero Civil. Master en Geotecnia.
Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Geometría Analítica*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería.


Gisela
FITT

Profesora de Matemática.
Jefe de Trabajos Prácticos de las asignaturas *Geometría Analítica* e *Introducción al Algebra Lineal*.
Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ingeniería. Facultad Ciencias Exactas y Naturales.

Prólogo

En la asignatura Geometría Analítica en *Facultad de Ingeniería* de la *Universidad Nacional de Cuyo*, se implementa un modelo pedagógico conformado por escenarios de interacción destinados a promover el desarrollo de habilidades asociadas al pensamiento complejo y capacidades que aportan a competencias profesionales. El trabajo con lugares geométricos en el plano y en el espacio exige el manejo apropiado y simultáneo de aspectos gráficos y analíticos que implican grandes desafíos para los estudiantes ingresantes. Se plantea así el reto de abrir nuevas puertas al aprendizaje, que lo potencien y enriquezcan a partir de intervenciones educativas generadas con actividades y recursos didácticos especialmente diseñados para tal fin.

En este texto, complemento del Texto "*Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*", se incluyen actividades para el aprendizaje a desarrollar en determinados escenarios del modelo pedagógico del espacio curricular.

En el primer Capítulo se realiza una descripción de la asignatura que abarca su ubicación dentro de los planes de estudio de las carreras a las que pertenece, los objetivos y resultados de aprendizaje, los contenidos teórico-prácticos, así como también el modelo pedagógico. En el segundo Capítulo se presentan actividades para los escenarios presenciales de desarrollo de contenidos tanto en el aula presencial como en la modalidad de trabajo de *Aula-Taller*. En el Capítulo 3 se detallan actividades complementarias propuestas para que los estudiantes elaboren en horario extra-áulico, promoviendo de este modo un incremento del aprendizaje autónomo. El Capítulo 4 describe un trabajo integrador de contenidos que incluye las respuestas para su verificación por parte del lector. Finalmente, en el Capítulo 5, se detalla una de las actividades de articulación con otros espacios curriculares, elaborada específicamente para los escenarios de articulación de contenidos. Se incluyen las referencias bibliográficas generales y las específicas asociadas al modelo pedagógico. En el Anexo I se encuentran las respuestas a los ejercicios complementarios.

Existen dos apartados especialmente destinados a docentes de otras unidades académicas interesados en conocer el marco conceptual de la propuesta de trabajo: por un lado, la descripción del modelo pedagógico de Geometría Analítica incluida en el Capítulo 1 y por otro, las respectivas referencias bibliográficas indicadas al final del texto.

AL ESTUDIANTE

¡Bienvenido al trabajo con la geometría analítica!

En este texto encontrarás el planteo de actividades destinadas a promover la comprensión profunda y la apropiación de conceptos de la Geometría Analítica del plano y del espacio, así como también a favorecer un acercamiento a situaciones de interés de tu carrera.

Te recomendamos fuertemente realizar una lectura comprensiva previa de los contenidos teóricos desarrollados en clase y en el texto de referencia, utilizando lápiz y papel para completar pasos, realizar esquemas o reafirmar conceptos, antes de intentar resolver los ejercicios. Es muy positivo además contar con una calculadora con pantalla para gráficas o un computador con algún paquete de representación gráfica, ya que el apropiado uso de estos elementos puede favorecer los procesos comprensivos de los conceptos desarrollados en la resolución de un mayor número de casos y en situaciones más complicadas.

Las siguientes recomendaciones te facilitarán el camino de resolución de problemas de geometría analítica del plano y del espacio:

- Lee cada enunciado detenidamente, extrayendo la información relevante para su resolución.
- Asigna nombres apropiados tanto a los datos como a las incógnitas.
- Realiza siempre una representación gráfica que facilite la interpretación del problema.
- Cuando hayas comprendido el problema y tengas definido un procedimiento de resolución, indica claramente todas las expresiones a utilizar.
- Una vez obtenidos los resultados, interpreta la solución obtenida y verifica la coherencia gráfica y analítica de los mismos.
- Intenta plantear otra vía de resolución del problema.
- Cuando sea posible, utiliza la aplicación de algún software de representación gráfica para orientarte al momento de dibujar y de interpretar tanto el problema como sus posibles caminos de resolución.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 5: PROBLEMA DE ARTICULACIÓN.

REFERENCIAS.

ANEXOS.

1. INTRODUCCIÓN.

1.1. SITUACIÓN CURRICULAR DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Los planes de estudio de las carreras de Ingeniería y de la Licenciatura en Ciencias de la Computación están organizados en base a una estructura que agrupa espacios curriculares en diferentes bloques o áreas de formación. En el área de *Ciencias Básicas* se encuentran las materias básicas instrumentales, que son aquellas que abarcan los contenidos curriculares y los fundamentos necesarios para el desarrollo de las competencias lógico - matemáticas y científicas requeridas para abordar las disciplinas específicas de la carrera.

Dicha área tiene por objetivos:

- Adquirir los prerrequisitos cognoscitivos, habilidades y actitudes necesarios para poder iniciar los estudios de las ciencias de la ingeniería y de la computación, con un nivel académico universitario de grado.
- Manejar algunos contenidos de iniciación en el área problemática de las ingenierías y de las ciencias de la computación.
- Resolver problemas con iniciativa, autonomía y creatividad.

La sólida formación básica no sólo provee al estudiante de las herramientas necesarias para abordar otras disciplinas, sino que además le brinda al futuro egresado la capacidad de actualización permanente.

Geometría Analítica es una asignatura que pertenece al área de Ciencias Básicas. Se dicta durante el primer semestre del primer año para todas las carreras de Ingeniería y para la Licenciatura en Ciencias de la Computación en Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo.

La *Geometría Analítica* permite hallar y estudiar los lugares geométricos del plano y del espacio de forma sistemática y general. Provee de métodos para transformar los problemas geométricos en problemas algebraicos, resolverlos analíticamente e interpretar geométricamente los resultados.

1.2. OBJETIVOS Y RESULTADOS DE APRENDIZAJE

1.2.1. Objetivos.

Geometría Analítica pertenece a la sub-área Matemática dentro del bloque de formación de ciencias básicas y como tal, contribuye a la formación lógico-deductiva del estudiante, a la vez que se promueve el desarrollo y la integración de conceptos, habilidades y actitudes necesarios para asignaturas de los restantes bloques de los planes de estudios y para la formación general del futuro profesional.

El principal objetivo de la asignatura es formar a los estudiantes en la resolución de problemas de la geometría analítica del plano y del espacio, necesarios para su formación básica y para abordar temas específicos de las restantes áreas de formación. De este modo se pretende que el estudiante esté capacitado para expresar, interpretar y manejar la geometría del entorno real que transformará mediante sus obras y proyectos de ingeniería, así como también para programar y utilizar aplicaciones informáticas que requieren de computación geométrica.

Así mismo, se desarrollan capacidades que aportan a competencias genéricas del futuro egresado:

- En la formación lógico-deductiva: comprender conceptos y principios y fundamentar con profundidad y rigurosidad.
- En la resolución de problemas de la ingeniería y de ciencias de la computación: comprender, aplicar y transferir el conocimiento en ciencias básicas a situaciones problemas concretas.
- En las habilidades que estimulen la capacidad de análisis, de síntesis y espíritu crítico, que despierten su vocación creativa y entrenen para el trabajo en equipo y la valoración de alternativas.
- En las habilidades para la comunicación oral y escrita.

Siendo que el futuro egresado se desenvolverá en un medio en constante evolución es importante estimular la creatividad, la curiosidad, la objetividad y la flexibilidad, así como también, asegurar la formación de profesionales con capacidad conceptual dinámica, sosteniendo una actitud permanente de actualización de conocimientos y asegurando el aprendizaje con rigor científico.

1.2.2. Resultados de aprendizaje.

Se espera que al finalizar el curso de Geometría Analítica los estudiantes sean capaces de:

- Definir y utilizar distintos sistemas de coordenadas.
- Definir y utilizar el concepto de espacio vectorial, sus propiedades y las relaciones entre sus elementos.
- Operar con vectores en el plano y en el espacio.
- Hallar y estudiar lugares geométricos.
- Calcular ángulos, distancias y proyecciones en el plano y en el espacio.
- Reconocer y describir distintos tipos de superficies.
- Obtener y emplear las expresiones analíticas de curvas y superficies.
- Planificar y desarrollar estrategias para la resolución de problemas geométricos en el plano y en el espacio, a partir de la identificación de los datos, la representación de los mismos, la identificación de ecuaciones apropiadas para modelar los lugares geométricos involucrados y el establecimiento de relaciones, integrando contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales.
- Utilizar software de representación gráfica para orientarse al momento de dibujar y de interpretar tanto el problema como sus posibles caminos de resolución.
- Utilizar aplicaciones computacionales interactivas para la visualización, el análisis y la exploración de problemas geométricos en el plano y en el espacio.
- Analizar e interpretar resultados, considerando la coherencia gráfico analítica y evidenciando comprensión.
- Comunicar con precisión y claridad, en forma oral y escrita, la fundamentación y el procedimiento de resolución de problemas geométricos en el plano y en el espacio.
- Comunicar reflexiva y críticamente, en forma oral y escrita, el análisis e interpretación de los resultados de problemas geométricos en el plano y en el espacio.

1.3. CONTENIDOS TEÓRICO-PRÁCTICOS

La asignatura está estructurada en 6 unidades didácticas. Se detallan a continuación los contenidos incluidos en las mismas, para los programas correspondientes a las carreras de Ingeniería Civil, Ingeniería Industrial, Ingeniería de Petróleos, Ingeniería en Mecatrónica y la Licenciatura en Ciencias de la Computación, en Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo. Los contenidos que se desarrollan en el espacio curricular cumplen con los requerimientos de los planes de estudio en vigencia de las carreras mencionadas y los estándares de acreditación correspondientes.

Unidad didáctica 1: Vectores. Álgebra vectorial: Vectores. Adición de vectores. Propiedades. Multiplicación de un vector por un escalar. Propiedades. Espacios vectoriales reales. Definición. Ejemplos. Propiedades. Combinación Lineal. Dependencia e independencia lineal. Conjunto generador. Base. Dimensión. Coordenadas de un vector respecto de una base dada. Módulo o norma de un vector. Vector unitario. Cosenos directores de un vector. Producto escalar. Propiedades. Ángulo entre dos vectores. Condición de ortogonalidad. Proyección ortogonal de un vector sobre un eje. Producto vectorial. Propiedades. Producto mixto. Propiedades. Bases ortonormales. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

Unidad didáctica 2: Planos y Rectas: Planos. Distintas formas de la ecuación de un plano. Distancia de un punto a un plano. Posiciones relativas de dos planos. Ángulo entre dos planos. Familias de planos. Familias de planos que pasan por la intersección de dos planos dados. Rectas en el plano y en el espacio. Distintas formas de la ecuación de la recta. Posiciones relativas de dos rectas. Distancia de un punto a una recta. Distancia entre dos rectas. Ángulo entre dos rectas. Ángulo entre recta y plano. Familias de rectas. Familias de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

Unidad didáctica 3. Cónicas: Definición general de cónica. Circunferencia. Ecuaciones paramétrica, vectorial y cartesiana de la circunferencia. Traslación de los ejes coordenados. Ecuación general de la circunferencia. Familias de circunferencias. Parábola, elipse e hipérbola: ecuaciones vectoriales, cartesianas, paramétricas. Familias de parábolas, de elipses y de hipérbolas. Traslación de ejes coordenados. Ecuaciones generales. Posiciones relativas entre una recta y una cónica. Ecuación de la recta tangente a una cónica por un punto perteneciente a la misma y por un punto exterior. Propiedades y aplicaciones de las cónicas. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

Unidad didáctica 4. Superficies: Superficie esférica. Plano tangente a una esfera. Superficies cilíndricas. Superficies cónicas. Superficies regladas. Superficies de revolución. Superficies cuádricas con y sin centro. Elipsoide. Hiperboloide de una hoja. Hiperboloide de dos hojas. Paraboloide elíptico. Paraboloide hiperbólico. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

Unidad didáctica 5. Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas: Sistema de coordenadas polares. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas polares. Ecuaciones polares de rectas y circunferencias. Ecuaciones polares de las cónicas. Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares. Otras curvas: espirales, lemniscatas, caracoles, rosas. Coordenadas cilíndricas. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas cilíndricas. Coordenadas esféricas. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas esféricas. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

Unidad didáctica 6. Ecuación general de segundo grado: Ecuación general de segundo grado en 2 variables: forma matricial; forma cuadrática asociada; rotación de los ejes coordenados; teorema de los ejes principales. Identificación de secciones cónicas. Ecuación general de segundo grado en 3 variables: forma matricial; forma cuadrática asociada; rotación de los ejes coordenados; teorema de los ejes principales. Identificación de superficies cuádricas. Aplicaciones con software. Aplicaciones en Ciencias e Ingenierías.

1.4. MODELO PEDAGÓGICO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.

En la asignatura Geometría Analítica en Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, se implementa un modelo pedagógico constituido por diferentes *escenarios de interacción* [*Raichman y Mirasso*, 2018], tales que a partir de una equilibrada y coherente articulación de *actividades significativas de aprendizaje* [*Molina y Prieto Castillo*, 1997] definidas en cada uno de ellos, favorezca en los estudiantes la apropiación de conceptos y procedimientos propios de la geometría analítica plana y espacial, así como también el desarrollo de capacidades asociadas a *competencias genéricas* del perfil profesional [*CONFEDI*, 2018].

1.4.1. Escenarios de desarrollo de contenidos en Geometría Analítica

Los escenarios de desarrollo de contenidos están constituidos por el Aula Teórico-Práctica y el Aula Taller [*Raichman y Totter*, 2008; *Raichman y Totter*, 2010]. El eje del trabajo en el aula Teórico-Práctica lo constituye el desarrollo de contenidos conceptuales y procedimentales en clases participativas e interactivas, en el marco de la *enseñanza para la comprensión* [*Perkins*, 1999]. Las demostraciones y resolución de problemas se elaboran en conjunto entre el docente y los estudiantes, en base a variados registros de representación y un trabajo de preguntas y respuestas, alternando con variadas actividades bajo el enfoque del *aprendizaje activo* [*Felder y Brent*, 2003].

Por otra parte, el Aula-Taller, constituye un escenario alternativo de interacción, donde se genera un modelo de trabajo en equipos desde la perspectiva del *aprendizaje colaborativo* [*Felder y Brent*, 2007], potenciando la comprensión profunda, la integración y la aplicación de contenidos y la transferencia de los mismos a situaciones que los acerquen a problemas reales. En cada grupo de Aula - Taller los estudiantes trabajan divididos en equipos de 4 a 6 integrantes, resolviendo los problemas indicados por el docente, quien realiza el seguimiento permanente de los avances logrados [*Raichman y Totter*, 2008]. Los problemas son seleccionados a partir de una guía de trabajos prácticos específicamente elaborada para este escenario de aprendizaje. En algunos casos la sesión de Aula-Taller se inicia con una actividad de recuperación de saberes previos, en la que se entrega a los estudiantes un cuestionario de rápida resolución.

Se estimula a los estudiantes a realizar inferencias, generar hipótesis, formular preguntas, organizar ideas para luego explicarlas y justificarlas a los otros. Se promueve la comunicación oral a través de la exposición del desarrollo de la solución obtenida por parte de los representantes de cada equipo. Se alienta un trabajo de interacción y de discusión de diferentes caminos de solución del problema, no sólo hacia el interior de cada equipo, sino también entre los expositores y el resto de los estudiantes. Las exposiciones finalizan con las palabras del docente, quien señala aspectos relevantes de cada uno de los problemas resueltos y atiende inquietudes que puedan surgir. El debate moderado por el docente promueve la discusión de distintas vías de solución del problema, en un ambiente de trabajo ameno, con un alto nivel de compromiso y pertenencia [*Raichman, et.al.*, 2014]. El estudiante, partícipe activo del proceso, se apropia del espacio en el cual es escuchado y respetado. Se genera así una comunidad de aprendizaje, con una cultura de trabajo propia y específica de cada Aula - Taller.

Teniendo en cuenta que la selección de un material de estudio apropiado entre variados textos con lenguajes simbólicos y enfoques diferentes es una tarea para la cual el estudiante recién ingresante, en general no está aún preparado para realizar, el texto de cátedra es un valioso y necesario recurso para los escenarios de desarrollo de contenidos [*Raichman y Totter,* 2016]. Las guías de actividades incluidas en este texto, referidas a ejercicios y problemas a resolver en el Aula Teórico-Práctica y en el Aula-

Taller, así como también los ejercicios complementarios, constituyen otro recurso importante en estos escenarios. Se plantean problemas de aplicación que resulten de interés y que a la vez se encuentren en un nivel apropiado para el estudiante del primer semestre de primer año.

1.4.2. Escenarios de tutorías en Geometría Analítica.

En la modalidad de trabajo de Aula - Taller de Geometría Analítica es posible incorporar las tutorías de pares. El rol asignado a los ayudantes alumnos es el de acompañar a los estudiantes en la apropiación de conceptos y procedimientos. En dicha tarea, es importante que sea acompañado por el docente a cargo del Aula-Taller en su compromiso de guiar en la construcción reflexiva del conocimiento, planteando preguntas y estableciendo relaciones, que favorezcan la integración del nuevo conocimiento con los saberes previos. Se busca la reflexión individual del estudiante sobre el conocimiento y que la interacción con sus iguales promueva la profundización de saberes, la confrontación de percepciones y distintas vías de solución del problema planteado [*Raichman, et.al.*, 2017].

1.4.3. Escenarios de exploración y experimentación en Geometría Analítica.

Los escenarios de experimentación y exploración se incluyen en actividades sincrónicas dentro de los escenarios de desarrollo de contenidos y en actividades asincrónicas en el escenario virtual de aprendizaje implementado en el *Aula Abierta de Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo*. Los recursos didácticos para la exploración y la experimentación se refieren tanto a las aplicaciones informáticas interactivas [*Raichman y Totter*, 2017] que permiten al estudiante explorar libremente y trabajar según sus propios ritmos de estudio, como a los dispositivos experimentales [*Raichman, et.al.*, 2018]. En el caso de estos últimos, se busca, mediante la manipulación, observación y exploración sobre objetos concretos, favorecer la apropiación de modelos matemáticos de los lugares geométricos en estudio. Las actividades diseñadas con estos recursos están destinadas a potenciar la comprensión y resolución de problemas en el espacio tridimensional. Los resultados se refieren a los cambios en las producciones gráficas de los estudiantes, en las asociaciones entre las representaciones gráficas y las expresiones analíticas de los lugares geométricos y en la resolución de problemas que los involucran.

1.4.4. Escenarios de articulación en Geometría Analítica.

Se realizan actividades de articulación con otras asignaturas: Análisis Matemático I, Cálculo Numérico y Computación, Análisis Matemático II, Estabilidad II e Introducción a la Programación [*Raichman y Pacini,* 2017]. Los recursos didácticos se refieren a las guías de trabajo específicas en las que se plantean a los estudiantes las actividades a realizar en el marco de la articulación definida, o bien a los ejercicios acordados entre los responsables de las asignaturas y que son incluidos en las guías de trabajos prácticos. La generación de escenarios de articulación promueve el trabajo en equipo de docentes de diferentes espacios curriculares para el diseño e implementación de una innovación educativa compartida, diversificando los contextos de aprendizaje de un mismo conocimiento e incrementando así las vías para su recuperación.

1.4.5. Escenarios de integración de contenidos en Geometría Analítica.

A partir de la resolución de un problema integrador seleccionado se busca que los estudiantes: planifiquen y desarrollen estrategias para la resolución de problemas geométricos a partir de la identificación de los datos, la representación de los mismos y el establecimiento de relaciones, integrando los conocimientos adquiridos en una situación concreta; analicen e interpreten resultados; sean metódicos en la exposición y en el registro de la información; se comuniquen con precisión y claridad en forma oral y escrita.

En los diferentes escenarios se integran además, actividades y recursos destinados a promover la autonomía en el aprendizaje y la metacognición [*Raichman y Mirasso*, 2018].

2. ACTIVIDADES PARA EL AULA Y EL AULA-TALLER.

2.1. ESPACIOS VECTORIALES.

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

1. Dado el conjunto $V = \{(x, y) \ / \ x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$, espacio vectorial respecto de las operaciones definidas como:

Suma: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

Producto por un escalar: $k(x, y) = (kx , ky)$

a) Escriba al vector $\boldsymbol{w} = (1.5, 0.5)$ como *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{u} = (1, 1)$ y $\boldsymbol{v} = (-1, 1)$. Represente gráficamente y valide su respuesta con el *Recurso Geométrico Interactivo RGI - Combinación Lineal* del Capítulo 1 de *Espacios Vectoriales* en el *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

b) Escriba al vector $\boldsymbol{w}$ como *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{u} = (1, 1)$ y $\boldsymbol{r} = (-2, -2)$. Valide su respuesta con el *Recurso Geométrico Interactivo RGI - Combinación Lineal* del Capítulo 1 de *Espacios Vectoriales* en el *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

c) Obtenga el vector $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$, siendo: $\boldsymbol{c} = 3\,\boldsymbol{u} + 2\,\boldsymbol{v}$.

d) Determine el conjunto que *genera* $B_1 = \{\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}\}$. Justifique su respuesta.

e) Determine el conjunto que *genera* $B_2 = \{\boldsymbol{u}; \boldsymbol{r}\}$ Justifique su respuesta.

f) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto B_1 es conjunto *linealmente dependiente* (LD) o conjunto *linealmente independiente* (LI).

g) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto B_2 es conjunto LD o conjunto LI.

h) Justifique si los conjuntos B_1 y B_2 son *base* de V.

i) ¿Cuál es la dimensión de cada uno de los espacios generados por los conjuntos B_1 y B_2? ¿Por qué?

2. Dados los siguientes vectores: $\boldsymbol{a} = (-8, 4)$; $\boldsymbol{b} = (2, -2)$; $\boldsymbol{c} = (-1, 0)$

a) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto $\{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}\}$ es conjunto LD o conjunto LI.

b) Elija un conjunto de vectores que resulte *base* de $\mathbb{R}^2$. Justifique su respuesta.

c) Escriba al vector $\boldsymbol{a}$ como *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Represente gráficamente.

d) Determine gráfica y analíticamente las *coordenadas* del vector $\boldsymbol{a}$ en la base $B_3 = \{\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}\}$, es decir $(\boldsymbol{a})_{B3}$

e) Relacione las respuestas obtenidas en c) y en d).

3. Dado el conjunto $A = \{(1, 3, 1); (0, 2, -1); (0, 0, 5)\}$

a) Determine si el conjunto A es base de $\mathbb{R}^3$. Justifique su respuesta.

a) Halle las coordenadas del vector $\boldsymbol{v}$ = (2, 0, 1) en dicha base.

b) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto {(1, 3, 1); (0, 2, -1); (0, 0, 5); (2, 0, 1)} es conjunto LD o conjunto LI.

4. Indique justificando su respuesta cuáles de los siguientes conjuntos de vectores, constituyen una Base de $\mathbb{R}^2$:

a) {(-3, 2, 0), (1, 0, -1)} ; b) { (2, 2), (4, 4) };

c) {(2, 1), (-1, 3), (0, 3)} ; d) { (1, -2), (0, 5) }

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

5. Dado el conjunto $V = \{(x, y, z) \,/\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$, espacio vectorial respecto de las operaciones definidas como:

Suma: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Producto por un escalar: $k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$

a) Indique la *base canónica* del mismo.

b) Obtenga un vector $\boldsymbol{w}$ tal que $\boldsymbol{w} = 5\boldsymbol{v}$, siendo $\boldsymbol{v} = (-1, 3, 2)$

c) Explique por qué el conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}; \boldsymbol{w}; \boldsymbol{a}\}$ no es base del espacio, cualquiera que sea el vector $\boldsymbol{a}$.

d) Indique una base del espacio vectorial que no sea la base canónica. Justifique su respuesta.

e) Encuentre las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ y de $\boldsymbol{w}$ en la base del inciso (d).

6. Dado el conjunto $S = \{(x, y) \,/\, y = 4x \,;\, x \in \mathbb{R}\}$

a) Verifique que es un *subespacio vectorial* de $\mathbb{R}^2$. Interprete geométricamente.

b) Justifique porqué el conjunto B = {(1, 4)} es conjunto generador de S.

c) ¿Cuál es la dimensión de S? ¿Por qué?

d) Dado el conjunto $D = \{(x, y) \,/\, y = 4x + 3 \,;\, x \in \mathbb{R}\}$, indique si es o no un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Justifique su respuesta. Interprete geométricamente.

7. Indique justificando su respuesta cuáles de los siguientes conjuntos de vectores, constituyen una Base de $\mathbb{R}^3$:

a) {(2, -1, 0); (-1, 0, 4)}

b) {(2, 1); (-3, 0); (3, -2)}

c) {(2, 3, -2); (0, 0, 0); (2, -4, 8)}

d) {(4, 0, 0); (1, -3, 0); (-2, 6, 5)}

8. Indique los conjuntos generados por cada uno de los siguientes conjuntos de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$:

a) $\{\boldsymbol{u}\}$

b) $\{\boldsymbol{u} \,;\, \boldsymbol{v}\}$

c) $\{\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v} \,;\, \boldsymbol{w}\}$

9. En un sistema coordenado *xy*, realice el siguiente procedimiento:

a) Ubique el punto inicial A(-2, 1), a partir del cual grafique el vector $\boldsymbol{w}$= (0, 2.5).

b) Ubique el punto C(2, 2), punto inicial de los vectores $\boldsymbol{v_1}$= (2, 1.5) y $\boldsymbol{v_2}$= (-0.5, 1).

c) Por el punto A trace una línea paralela a la dirección dada por el vector $\boldsymbol{v_1}$.

d) Por el punto extremo final del vector $\boldsymbol{w}$ trace una línea paralela a la dirección dada por el vector $\boldsymbol{v_2}$.

e) Determine gráficamente los escalares k_1 y k_2 que permiten escribir al vector $\boldsymbol{w}$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$. Compare con la solución analítica.

f) Indique, justificando su respuesta, si modificando las coordenadas de A y/o C se modifica su respuesta.

g) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto {$\boldsymbol{v_1}$; $\boldsymbol{v_2}$} genera a $\mathbb{R}^2$.

h) Justifique que el conjunto B={$\boldsymbol{v_1}$; $\boldsymbol{v_2}$} es base de $\mathbb{R}^2$ y determine las coordenadas de $\boldsymbol{w}$ en dicha base.

i) Indique las coordenadas del vector $\boldsymbol{u}$ sabiendo que $(\boldsymbol{u})_B$=(-2,3).

j) Utilice el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Combinación Lineal* para verificar las respuestas (a) a (e) y el *RGI-Cambio de base* para verificar la respuesta. [*Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

2.2. VECTORES GEOMÉTRICOS PRODUCTO ESCALAR.

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

10. Sea $\boldsymbol{v}$ un vector de $\mathbb{R}^3$:

a) Determine cos α , si $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos\gamma = \frac{1}{2}$

b) Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que el vector $\boldsymbol{u} = (4, 4\sqrt{2}, 4)$. Compare con la respuesta del inciso (a).

c) Encuentre las componentes del vector $\boldsymbol{w}$, si $\|\boldsymbol{w}\| = 4$ y su versor es el vector $\boldsymbol{v}$ del inciso (a).

11. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (4, 3)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 6)$ y $\boldsymbol{c} = (x, y)$.

a) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\boldsymbol{c}$ si es $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \,.\, \boldsymbol{c} = 15$ y además el vector $\boldsymbol{c}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{b}$?

b) Represente gráficamente y verifique su respuesta.

c) Indique, justificando su respuesta, si cada uno de los siguientes conjuntos es LD o LI:

c.i) $\{\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}\}$; c.ii) $\{\boldsymbol{b} ; \boldsymbol{c}\}$; c.iii) $\{\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b} ; \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\}$; c.iv) $\{\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b} ; \boldsymbol{c}\}$

12. Dos cuerdas, AB y CB, sujetan un cable vertical en B (3,3) que soporta un objeto. Las cuerdas están fijas en los puntos A (0,6) y C (7,7). Las distancias están medidas en metros. En el punto B actúa una fuerza vertical hacia abajo de 4 kN.

a) Represente gráficamente e indique las componentes de los vectores ***AB***, ***CB***, y ***F***.

b) Determine las longitudes de ambas cuerdas.

c) Evalúe el vector proyección del vector fuerza ***F*** en la dirección de cada una de las dos cuerdas.

13. Dados los vectores ***a*** = (4, –1, –4) y ***b***=(1, 1, 2) :

a) Halle la *proyección ortogonal* del vector ***a*** en la dirección del vector ***b***.

b) Determine el *vector proyección* de ***a*** en la dirección del vector ***b***.

14. Dados los vectores ***u***=(3/5, 4/5) y ***v***=(4/5, -3/5),

a) Evalúe el ángulo que ellos forman.

b) Calcule *la proyección* del vector ***w*** = (3,9) en la dirección del vector ***u*** y *la proyección* de ***w*** en la dirección del vector ***v*.**

c) Indique, justificando su respuesta, si {***u*** ; ***v***} es o no una base ortonormal (BON) de $\mathbb{R}^2$.

d) Determine gráfica y analíticamente las coordenadas del vector ***w*** = (3,9) en la base B = {***u*** ; ***v***}

e) Compare los valores obtenidos en (b) y (d). ¿Qué conclusiones obtiene?

f) Represente gráficamente todos los vectores y verifique sus respuestas analíticas.

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

15. Sean los vectores ***a***=(1,–1, 2) y ***b***=(2, 1, -1) :

a) Encuentre un vector ***c***, no nulo, que sea *combinación lineal* de ***a*** y de ***b*** y perpendicular al vector ***a***. ¿Es único dicho vector ***c***? Interprete geométricamente.

b) Encuentre un *vector unitario* o versor en la dirección del vector ***a***.

c) Indique, justificando su respuesta, si cada uno de los siguientes conjuntos es LD o LI e identifique el *espacio generado* por cada uno de ellos: c.i) { ***a*** ; ***b*** ; ***c*** } ; c.ii) { ***a*** ; ***b*** }; c.iii) { ***a*** }

16. Demuestre que el vector proyección ***w*** de un vector dado ***u*** sobre la dirección de otro vector dado ***v*** no nulo, está dado por: $\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$

17. Dados los vectores ***a***=(1,2), ***b***=(0,-2) y ***w***=(-4,2) :

a) Determine el *vector proyección* del vector ***w*** sobre la dirección del vector:

v = 2***a*** + ***b***

b) Represente gráficamente todos los vectores del inciso anterior y verifique su respuesta analítica.

c) Verifique su respuesta empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Proyección*, en el [*Libro Interactivo Geometría Dinámica*]. En dicho Recurso se designa componente de ***w*** en la dirección del vector ***v***, al valor de k tal que:

Proy $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{m} = k\,\boldsymbol{v}$. Es decir , $k = \frac{\boldsymbol{w}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$

d) Indique, justificando su respuesta, si cada uno de los siguientes conjuntos es LD o LI e identifique el *espacio generado* por cada uno de ellos: d.i) $\{ \boldsymbol{a} , \boldsymbol{b} , 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \}$; d.ii) $\{\boldsymbol{w} , \boldsymbol{v}\}$; d.iii) $\{\boldsymbol{w} , \boldsymbol{b}\}$

18. La columna de una antena de 5m de altura está colocada sobre el eje *z*. Está sostenida por tres tensores que parten del extremo superior y se dirigen a los puntos $P_1(-5, -5, 0)$ m, $P_2(0, 5, 0)$ m y $P_3(10, -5, 0)$ m. Los tensores ejercen sobre la columna una fuerza de 750 N, vertical hacia abajo.

a) Demuestre que los tensores son mutuamente perpendiculares.

b) Indique una *base ortonormal* de $\mathbb{R}^3$ cuyos vectores tengan las direcciones de los tres tensores.

c) Determine la proyección del vector fuerza $\boldsymbol{F}$ en la dirección de cada uno de los tres tensores.

d) Verifique que se cumple el Teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^3$ para las componentes ortogonales del vector $\boldsymbol{F}$ en las direcciones de los tensores.

2.3. PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO.

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

19. El vector momento de una fuerza $\boldsymbol{f}$ se define como $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{OP} \wedge \boldsymbol{f}$, siendo $\boldsymbol{OP}$ el vector posición del punto de aplicación de la fuerza.

a) Encuentre el vector momento de la fuerza $\boldsymbol{f} = (20, 40, 30)$ N, aplicada en el punto P (3, 1, 3) m.

b) Verifique que el vector momento es perpendicular tanto al vector $\boldsymbol{f}$ como al vector $\boldsymbol{OP}$.

20. Dados dos vectores cualesquiera $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$:

a) Encuentre una expresión que permita calcular el área del paralelogramo que tiene a los vectores como lados. Justifique la respuesta.

b) Dados los vértices P (1, -2, 3), Q (2, 2, 1) y R (0, 4, -1) del paralelogramo *PQRS*, determine coordenadas para el vértice S y calcule el área de dicho paralelogramo.

21. El producto vectorial entre dos vectores puede reiterarse multiplicando vectorialmente por otro vector. Esta operación se llama *doble producto vectorial*.

a) Resuelva el siguiente producto doble vectorial y verifique que el vector que resulta es perpendicular al vector $\boldsymbol{a}$ y al vector $(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$:

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$, siendo $\boldsymbol{a} = -2\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{c} = 2\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j}$.

b) Indique, justificando su respuesta, si cada uno de los siguientes conjuntos es LD o LI:

b.i) $\{ \boldsymbol{a} , \boldsymbol{b} , \boldsymbol{c} \}$; b.ii) $\{ \boldsymbol{b} , \boldsymbol{c} , \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \}$; b.iii) $\{ \boldsymbol{b} , \boldsymbol{c} , \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \}$

22. Dados tres vectores cualesquiera ***u, v, w***

a) Demuestre la forma de calcular el volumen del paralelepípedo que tiene a los tres vectores como aristas concurrentes.

b) Dados los puntos A (0, 1, 1), B (–2, 1, 1), C (4, 1, 0) y D (3, 5, 2), calcule el volumen del prisma de base triangular de aristas ***AB, AC*** y ***AD***.

23. Se quiere realizar una excavación en el área definida por los puntos A(0,2,1), B(0,8,0), C(3,6,0) y D(3,0,1), de 4 metros de profundidad medidos desde el punto B (o C).

a) Represente gráficamente y determine las coordenadas de los puntos que definen la zona de excavación.

b) Evalúe el volumen de tierra a extraer.

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

24. Dados los vectores ***a*** = (4, -2, 3) y ***b*** = (2, 0, -1):

a) Calcule el vector ***w*** resultado del producto vectorial entre los vectores ***a*** y ***b***.

b) Compruebe que el vector ***w*** es perpendicular a cada uno de los vectores dados.

c) Identifique el espacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos de vectores:

c.i) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$; c.ii) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\}$

25. Para los vectores dados: ***a*** = (–2, 1, 2), ***b*** = (3, 1, 0) y ***c*** = (1, 3, 0),

a) Verifique la siguiente identidad: $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$

b) Interprete geométricamente la identidad dada en el inciso anterior e indique, justificando su respuesta, si el conjunto $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

26. Una fuerza puede trasladarse sobre su recta de acción. Teniendo en cuenta ello, demuestre que el vector momento de una fuerza no depende del punto de aplicación de la misma.

27. Dados los vectores ***a*** = (1,2,3), ***b*** = (3,-2,1), ***c*** = ***i*** + 3***j*** –6 ***k***

a) Determine el vector ***v***, sabiendo que ***v*** es perpendicular a los vectores ***a*** y ***b***, y satisface además la condición $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{c} = 40$

b) Indique, justificando su respuesta, si los vectores ***a***, ***b*** y ***v*** forman una base de $\mathbb{R}^3$.

28. Sean los vectores ***a*** = (2, 3, 5), ***b*** = (2, 3, 2) y ***c*** = (– 4, α, –10).

a) Halle el valor de α de modo que el producto mixto de los vectores dados sea nulo.

b) Indique, justificando su respuesta, si los vectores ***a*** , ***b*** y ***c*** forman una base de $\mathbb{R}^3$.

29. Dados los puntos A(9,0,0), B(0,9,0), C(0,0,9) y D(0,0,0):

a) Calcule el volumen del tetraedro *ABCD*.

b) Represente gráficamente.

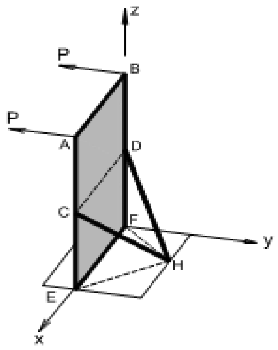
30. La Figura muestra una estructura de acero definida por los puntos: A(4, 0, 10)m; B(0, 0, 10)m; C(4, 0, 5)m; D(0, 0, 5)m; E(4, 0, 0)m; F(0, 0, 0) y H(2, 3, 0)m. Sobre la misma se encuentran aplicadas dos fuerzas **P** en la dirección y sentidos indicados, cuyo módulo es de 1000N. A partir de la utilización de operaciones exclusivamente vectoriales resuelva los siguientes incisos:

a) Encuentre la superficie del panel ABFE.

b) Encuentre la proyección vectorial ortogonal de una fuerza **P** sobre el puntal HC.

c) Halle el ángulo comprendido entre los puntales HC y HD

d) Halle el volumen del espacio comprendido entre los puntos C, D, F, E y H



2.4. PLANOS

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

31. Un plano pasa por los puntos A(−1, 1, 0), B(2, −3, 4) y C(−3, 1, 1).

a) Encuentre las distintas formas de su ecuación: general, normal, segmentaria, vectorial paramétrica y cartesianas paramétricas.

b) Escriba las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos y represente gráficamente: plano paralelo al plano yz que pasa por el punto B; plano paralelo al plano xy que pasa por el punto C.

32. Dados los planos:

π_1: $2x - y + z - 3 = 0$

π_2: $x - 2z + 6 = 0$

π_3: $(x, y, z) = (3,0,1) + t(2,0,-4) + k(2,5,1,)$ $\quad t, k \in \mathbb{R}$

a) Indique, justificando su respuesta, dos de los planos dados que sean paralelos.

b) Indique, justificando su respuesta, dos de los planos dados que sean perpendiculares.

c) Determine la intersección del plano $\boldsymbol{\pi_1}$ con los planos coordenados (*trazas*).

d) Represente gráficamente y verifique todas sus respuestas.

33. Dada la ecuación del plano π_1: [**OP** – (2, -1, 5)].(-3, 0, 1)=0

a) Determine la ecuación de un plano π_2, paralelo a π_1 que pase por el punto Q (9,0,1). ¿Es único?

b) Determine la ecuación de un plano π_3, perpendicular a π_1 que pase por el punto R(2,7,0). ¿Es único?

34. Dados los planos:

π_1: $2x - y + z + 1 = 0$

π_2: $x + 2y - z - 4 = 0$

a) Usando el concepto de familia de planos, encuentre la ecuación del plano π_3 que pasa por la intersección de los planos dados y por el punto Q (–1, 1, 1).

b) Determine el ángulo que forman los dos planos dados.

c) Halle la ecuación del plano π_4 normal a los dos planos dados y que pasa por el punto Q. Encuentre el punto de intersección entre estos tres planos.

35. Dado el plano $\boldsymbol{OP} = (3, 2, 4) + \mu\,(2, 4, 2) + \beta\,(6, 4, 8)$ $\quad \mu, \beta \in \mathbb{R}$

a) Indique las coordenadas de dos puntos del plano dado.

b) Calcule la distancia desde el punto A (1, 3, 3) al plano dado.

c) Encuentre las ecuaciones de los planos que disten 3 unidades del plano dado.

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

36. Determine si los puntos A (1, 2, 3), B (0, 1, 0), C (0, 0, 1) y D (0, 1, 1) pertenecen a un mismo plano. Justifique su respuesta.

37. Dado el plano de ecuación $\pi: 5x + 5y + z - 5 = 0$:

a) Calcule el ángulo que forma el mismo con el plano xy;

b) Calcule el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados. Represente gráficamente.

c) Calcule la distancia desde el punto Q (5,3,1) al plano dado.

38. Dados los planos: π_1 : $2x - 4y + 2z - 3 = 0$ y π_2: $2x + 6y - z - 26 = 0$

a) Encuentre la ecuación del plano π_3 que pasa por el punto R (1, 4, 3) y por la intersección de los dos planos dados, usando el concepto de *familia de planos*.

b) Determine la ecuación del plano π_4 perpendicular a los dos planos dados que contenga al origen de coordenadas.

c) Indique, justificando su respuesta, si el plano π_4 pertenece a la familia de planos que pasa por la intersección de π_1 y π_2

39. a) Escriba la ecuación de la *familia de planos* que pasan por la intersección del plano xy y el plano xz. Represente gráficamente dos planos de dicha familia.

b) Determine la ecuación del plano que pertenece a dicha familia y es plano bisector de ambos planos coordenados. Represente gráficamente.

40. Dada la siguiente ecuación vectorial paramétrica del plano π_1 :

π_1 : $\boldsymbol{OP}$ = (1, 2, 0) + μ (1, 4, -2) + β (3, 0, 2) $\mu, \beta \in \mathbb{R}$

a) Determine las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a dicho plano.

b) Halle la ecuación cartesiana de un plano π_2 que sea perpendicular al plano dado π_1, que sea paralelo al eje *z* y que además pase por el origen de coordenadas. Justifique su respuesta.

c) Verifique sus respuestas utilizando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Posiciones relativas entre planos*. [*Libro Geometría Dinámica*].

2.5. RECTAS

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

41. Rectas en $\mathbb{R}^2$. Halle las ecuaciones de las siguientes rectas y represente gráficamente:

a) La recta que pasa por el punto A (3,1) y es paralela a la recta determinada por los puntos B (4, 1) y C (−2, 2).

b) La recta que pasa por el punto Q (2, 2) y es perpendicular a la recta dada en el inciso anterior.

42. Familia de rectas en $\mathbb{R}^2$:

a) Obtenga la ecuación de la familia de rectas que tiene ordenada al origen $b = -4$.

b) Calcule el ángulo entre las rectas L_1: $3x - 3y + 1 = 0$ y L_2: $x = -y - 3$

c) Encuentre la ecuación de la familia de rectas que pasan por la intersección de las dos rectas dadas en el inciso anterior.

d) Represente gráficamente y verifique las respuestas anteriores.

43. Rectas en $\mathbb{R}^3$

a) Halle la ecuación vectorial paramétrica, cartesianas paramétricas y simétricas de la recta L_1 que pasa por el punto Q(2,2,-2) y es paralela al vector $\boldsymbol{v}$ = (2,-1,3).

b) Halle la intersección de la recta L_1 con los planos coordenados.

c) Encuentre dos puntos de la recta L_1, distintos a los determinados en el inciso anterior.

d) Determine el ángulo que forma la recta L_1 con la recta:

$x = 4 - 2\,t,\;\; y = 3 + 2\,t,\;\; z = -7 + 3\,t\,,\;\; t \in \mathbb{R}$;

e) Calcule la distancia de la recta L_1 al punto M (4, −1, 3).

44. Sean las rectas: $L_1\!: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ $L_2\!: \begin{cases} -x + y + 1 = 0 \\ -6y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

a) Encuentre la ecuación vectorial paramétrica y las ecuaciones simétricas de la recta L_2. Identifique los números directores.

b) Indique justificando su respuesta, si las rectas dadas son paralelas, secantes (incidentes) o alabeadas. Determine la distancia entre ambas o el punto de intersección, según corresponda.

c) Determine la ecuación de la recta L_3 que es perpendicular simultáneamente a las rectas L_1 y L_2 y que pasa por el punto Q (1,-5,3).

45. Encuentre la proyección del punto Q (2,2,2) sobre el plano $2x + y - z + 6 = 0$ paralela a la dirección dada por el vector $\boldsymbol{v} = (1,1,-2)$.

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

46. Halle las distintas formas de la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $\boldsymbol{OP} = (2, 4) + t\,(4, -3);\ t \in \mathbb{R}$ y pasa por el punto Q (2,1). Represente gráficamente.

47. Dadas las rectas $y=3$ e $y=-x$

a) Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto P (2, 5) y por la intersección de las rectas dadas usando el concepto de *familia de rectas*.

b) Represente gráficamente.

48. Dadas las siguientes rectas:

L_1: $\boldsymbol{OP} = (1,1,-1) + t_1\,(2,3,1)\ \ t_1 \in \mathbb{R}$ y L_2: $\boldsymbol{OP} = (-1,-2,-2) + t_2\,(1,4,2)\ ;\ t_2 \in \mathbb{R}$

a) Demuestre que las rectas L_1 y L_2 se cortan en un punto.

b) Halle las coordenadas del punto de intersección.

c) Determine la ecuación del plano que ellas definen.

d) Calcule el ángulo que forman las dos rectas.

49. Distancia entre un punto y una recta en $\mathbb{R}^3$.

a) Encuentre una expresión que permita calcular la distancia entre un punto y una recta en $\mathbb{R}^3$. Justifique su desarrollo.

b) Calcule la distancia entre el punto Q(−2, 3, 5) y la recta L_1: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

50. Dado el plano $\pi_1 : 2x - y + z + 3 = 0$

a) Escriba la ecuación vectorial paramétrica de la recta L_1 que es perpendicular al plano π_1 y pasa por el punto Q (-1,3,6).

b) Determine si la recta L_2: $(x,y,z) = (0,1,1) + k\,(-4,0,8)$, $k \in \mathbb{R}$, y el plano π_1 son paralelos, o se cortan en un punto, o la recta está contenida en el plano. Justifique su respuesta

51. Una vía férrea pasa por los puntos Q_1 (20, 5, 0) y Q_2 (0, 30, 0.5) en un tramo recto en el que existe una línea aérea de distribución de electricidad que pasa por los puntos

R_1 (0, 10, 5.5) y R_2 (200, 10, 0.5). Indique si la vía férrea y la línea de distribución de electricidad son paralelas o alabeadas y determine la mínima distancia entre ambas.

52. a) Indique la ecuación de la familia de planos con traza común en el plano xy la recta: $2x + y - 8 = 0$. Represente gráficamente dos planos de dicha familia.

b) Indique la ecuación vectorial paramétrica de la traza dada en el inciso(a).

c) Escriba las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos y represente gráficamente:

c.1. plano paralelo al plano xy que pasa por el punto Q (2,-3,5);

c.2. plano perpendicular al plano xy que pasa por los puntos A (4,0,0) y B (0,8,0);

c.3. ecuación vectorial paramétrica de la recta intersección de ambos planos.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos en GeoGebra y utilizando los comandos *Producto Vectorial* y *Plano Perpendicular*. Utilice las distintas vistas para ayudarse en la visualización.

53. Dado el plano π_1 : $4y + 3z - 24 = 0$

a) Determine la posición relativa entre el plano dado y el eje x. Represente gráficamente.

b) Calcule la distancia entre el plano dado y el eje x, o bien el punto de intersección entre ambos, según corresponda.

c) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos en GeoGebra y utilizando los comandos *Perpendicular*, *Interseca* y *Distancia*.

2.6. CIRCUNFERENCIAS

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

54. Determine analíticamente la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C (2, -1) y es tangente a la recta L: $x - y + 1 = 0$. Represente gráficamente.

55. Halle la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos A (0, 0), B (2, 3) y C (5, 1). Represente gráficamente.

56. Determine un nuevo sistema de coordenadas respecto del cual la ecuación: $x^2+y^2+4x-6y+9 = 0$ carezca de términos lineales. Identifique el lugar geométrico de los puntos que cumplen con dicha ecuación y encuentre sus elementos fundamentales. Represente gráficamente.

57. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta L de ecuación L: $2x + y - 14 = 0$ y pasa por la intersección de las circunferencias:

C_1: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$: C_2: $2x^2 + 2y^2 - 8x + 8y - 16 = 0$

Utilice el concepto de *familia de circunferencias*. Represente gráficamente. Determine la longitud de la cuerda común de las circunferencias dadas.

58. Determine los puntos de intersección entre la circunferencia

C_1: $(x+4)^2 + y^2 = 9$ y cada una de las siguientes rectas. Represente gráficamente.

a) L_1: $y + x - 5 = 0$; b) L_2: $y - x - 1 = 0$; c) L_3: $x + 7 = 0$.

59. Halle la ecuación de las rectas tangentes a la circunferencia:

$2x^2 + 2y^2 + 4x + 2y - 22 = 0$ y que tengan pendiente $-3/2$. Represente gráficamente.

60. Indique las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio 4 y centro en C (-1,3).

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

61. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro es C (3, −2) y pasa por el punto A (3, 7). Determine además la ecuación en su forma paramétrica vectorial. Represente gráficamente.

62. Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto Q (−3, 2) y tiene su centro en la intersección de las rectas: L_1 :$3x - y + 15 = 0$ y L_2 : $4x + y + 13 = 0$. Represente gráficamente.

63. Halle la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es C (3, −2) y es tangente a la recta L: $3x - 2y = 0$. Grafique.

64. Dadas las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

C_1: $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$; C_2: $4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$

a) Halle la ecuación del eje radical de las mismas.

b) Demuestre que el eje radical es perpendicular a la recta que une sus centros.

c) Represente gráficamente.

d) Halle la ecuación de la circunferencia C_3 cuyo centro tiene abscisa h=7, y que pertenece a la familia de circunferencias que pasan por la intersección de C_1 y C_2.

e) Halle la ecuación de la circunferencia C_4 cuyo centro es el origen de coordenadas y tal que C_4 es tangente a la recta que une los centros de las circunferencias C_1 y C_2. La circunferencia obtenida ¿pertenece o no a la familia de circunferencias que pasan por la intersección de C_1 y C_2? Justifique su respuesta.

65. Indique ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio 6 con centro en C (-2,1) y determine a partir de ellas dos puntos de dicha circunferencia. Represente gráficamente.

66. En un proyecto vial, se requiere diseñar una rotonda para mejorar el empalme de dos rutas nacionales. Se toma como referencia un sistema coordenado xy, para el cual el centro de la rotonda se ubicará en el punto C (-70;0) m. El diámetro de la rotonda será de 60m. Se prevé que las vías de acceso desde y hacia una de las rutas serán las tangentes a la rotonda desde el origen de coordenadas.

a) Obtenga la ecuación cartesiana y la ecuación general de la circunferencia que describe la rotonda.

b) Encuentre los puntos de intersección entre la circunferencia y las rectas tangentes a la misma que pasan por el punto O (0,0) (Exprese la solución aproximando con un decimal).

c) Obtenga ecuaciones generales que permitan describir a las vías de acceso, siendo éstas las rectas tangentes a la circunferencia desde el punto O (0,0).

d) Represente gráficamente el problema planteado y la totalidad de las soluciones halladas.

2.7. PARÁBOLAS

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

67. Indique todos los elementos (foco, vértice, directriz, lado recto y puntos extremos del lado recto) de la parábola cuya ecuación general es: $x^2 - 6x + 8y - 23 = 0$. Represente gráficamente.

68. Halle la ecuación de la parábola cuyo vértice es V (−4, 3) y su foco es F (−1, 3). Represente gráficamente.

69. Halle la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta L: $3x + 9y - 11 = 0$. Represente gráficamente.

70. Las torres de una línea de alta tensión están separadas 100 m y tienen una altura de 16m. Los cables de la línea no deben estar a menos de 6m sobre el nivel de suelo. Halle la ecuación de la parábola que determinan los cables. Indique la altura de un punto que está situado a 20m del vértice. Represente gráficamente.

71. Halle la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$, y que es perpendicular a la recta L: $4x + 2y + 5 = 0$. Represente gráficamente.

72. a) Indique *ecuaciones paramétricas* de la parábola de vértice V (1,1), parámetro p = 4 y eje focal paralelo al eje x. Identifique a partir de dichas ecuaciones dos puntos de la curva y grafique.

b) Escriba la ecuación de una *familia de parábolas* de vértice V (1,1) y grafique tres curvas de dicha familia.

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

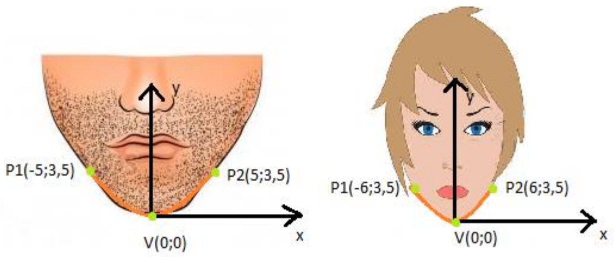
73. Determine gráfica y analíticamente la intersección de la curva cuya ecuación es: $x^2 - 6x + y + 4 = 0$ con la recta L: $- y + x = 0$.

74. a) Halle desde el punto Q (–1,–1) las dos rectas tangentes a la parábola $y^2 - x + 4y + 6 = 0$. b) Calcule el ángulo que determinan estas rectas. c) Verifique sus respuestas representando gráficamente la parábola con el software GeoGebra y utilizando los *Comandos Tangente* y *Ángulo*.

75. El cable de suspensión de un puente colgante puede aproximarse mediante la forma de un arco parabólico. Las columnas que lo soportan están separadas 480 m y tienen una altura de 56 m. El punto más bajo del cable queda a una altura de 12 m sobre la calzada del puente. Determine la ecuación de la parábola, considerando como eje de abscisas la horizontal que define el puente, y como eje de ordenadas el eje de simetría de la parábola. Calcule la altura correspondiente a un punto situado a 80 m de las columnas. Represente gráficamente.

76. Para el diseño de un software de reconocimiento facial resulta útil aplicar la definición de parábola y el concepto de familia de la misma. Se asimila la forma del mentón a dicha curva, tomando como referencia el vértice (asociado al punto inferior del mentón) coincidente con el origen de coordenadas.

a) Dados los siguientes casos, determine para cada uno el parámetro geométrico p que caracteriza a cada parábola y escriba las ecuaciones cartesianas de las mismas.



b) Plantee la ecuación correspondiente a la familia de parábolas a las cuales pertenecen los casos del inciso previo. ¿Cuál sería el parámetro a utilizar?

c) Para las parábolas determinadas en el inciso a) encuentre las coordenadas del foco, las coordenadas de los extremos del lado recto junto con su longitud, la ecuación de la recta directriz. Grafique.

d) Considerando que el parámetro geométrico caracteriza a un individuo en particular. Siendo el parámetro p=4,11, a qué individuo de la siguiente base de datos corresponde:

i. Individuo A - P1 (-6,7 ; 3,5) y P2 (6,7 ; 3,5)
ii. Individuo B - P1 (- 4,6 ; 3,5) y P2 (4,6 ; 3,5)
iii. Individuo C - P1 (- 5,36 ; 3,5) y P2 (5,36 ; 3,5)

77. a) Indique *ecuaciones paramétricas* de la parábola de vértice V (2,-2), parámetro $p = 3$ y eje focal paralelo al eje y. Identifique a partir de dichas ecuaciones dos puntos de la curva y grafique.

b) Escriba la ecuación de una *familia de parábolas* adoptando como fijo alguno de los parámetros del inciso anterior y grafique tres curvas de dicha familia.

78. Dada la parábola de vértice V (h,k) y eje focal paralelo al eje de abscisas, verifique la propiedad de reflexión en un punto extremo del lado recto.

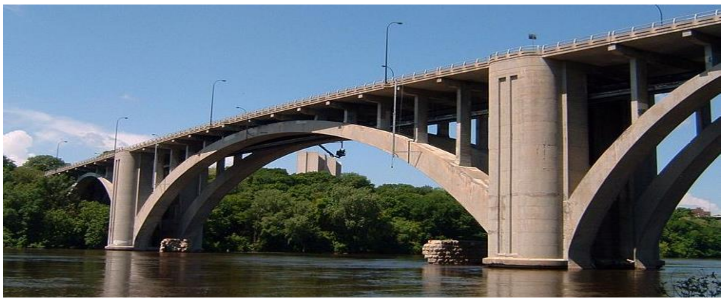
2.8. ELIPSES E HIPÉRBOLAS

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

79. Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos P (x, y) cuya suma de sus distancias a los puntos fijos (4, 3) y (–2, 3) sea igual a 10. Represente gráficamente.

80. Dada la *elipse* $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$, halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la misma que son perpendiculares a la recta L: $x + y - 5 = 0$. Grafique.

81. Un río es cruzado por una carretera por medio de un puente cuyo arco central tiene la forma de media *elipse*. En el centro del arco la altura es de 20 m. El ancho total del arco elíptico es de 50m.



a) Determine la ecuación de la elipse que describe este puente.

b) A una distancia de 5m de cada uno de los pilares, se encuentran estructuras de protección para los mismos. ¿Cuál es la altura del arco del puente en correspondencia con estos elementos?

c) Represente gráficamente.

82. Indique las ecuaciones paramétricas de la *elipse* con centro C (-2,0), semiejes a=5 y b=4, y eje focal paralelo al eje x.

83. El centro de una *hipérbola* es el punto C (4, 2), uno de sus focos es F (–6, 2) y su excentricidad es $e=5/4$.

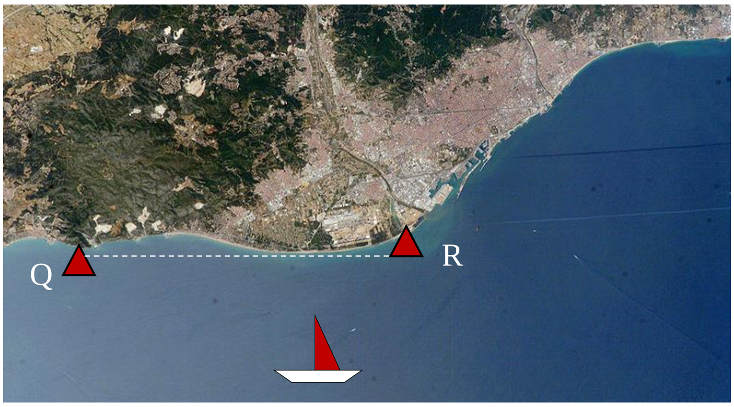
a) Halle su ecuación general.

b) Indique todos sus elementos y represente gráficamente.

c) Obtenga los puntos de intersección con el eje x.

84. Halle la ecuación de la recta normal a la *hipérbola* cuya ecuación general es $3x^2 - 4y^2 - 18x - 40y - 85 = 0$ en un punto de la misma de ordenada –2 y abscisa negativa. Represente gráficamente.

85. Una embarcación envía una señal en el momento en el que se encuentra a 194 km de la costa. Dos estaciones guardacostas designadas como Q y R, que se encuentran ubicadas a 354 km de distancia entre sí, reciben dicha señal. A partir de la diferencia entre los tiempos de recepción de la misma, se determina que la nave se encuentra 258 km más cerca de la estación R que de la estación Q. Elija un sistema de referencia apropiado e indique las coordenadas correspondientes a la ubicación de la embarcación. Represente gráficamente.



86. Verifique que las siguientes ecuaciones representan los puntos de una *hipérbola* de centro C (0,0) y semiejes a y b:

$$\begin{cases} x = a \sec(t) \\ y = b \, tg\,(t) \end{cases} \quad t \epsilon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

87. En cada caso indique todos los elementos de las siguientes *elipses* y represente gráficamente:

a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

c) $4x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 14 = 0$; d) $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$

88. Halle el ángulo formado por la recta L: $2x - 3y + 1 = 0$ con las rectas tangentes a la *elipse* $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, en los puntos de intersección de la elipse con la recta L.

89. Un puente de arco *semielíptico* tiene una amplitud de 18 m en su base. En el centro su altura es de 8 m. Seleccione un sistema de coordenadas cartesianas apropiado y determine la altura del puente en un punto que está ubicado a 4 m de los extremos. Represente gráficamente.

90. Determine gráfica y analíticamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la *elipse E* por el punto exterior Q (10,0). La elipse E es tal que sus focos son los puntos F_1 (-4,0) y F_2 (4,0) y pasa por el punto P_0 (2,3). Verifique sus respuestas con la ayuda del *Recurso Geométrico Interactivo RGI – Tangentes a una elipse por un punto exterior* [Capítulo 3 del Libro Interactivo Geometría Dinámica].

91. Indique ecuaciones paramétricas de la *elipse* con centro C (-1,1), semiejes a=6 y b=4 y eje focal paralelo al eje y.

92. Dada la ecuación: $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

a) Represente la cónica y determine sus elementos fundamentales.

b) Determine los puntos de intersección entre la cónica del inciso anterior y las rectas: L_1: $y - x + 8 = 0$ y L_2: $2y - x + 4 = 0$

93. Dada la ecuación cuadrática: $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$

a) Identifique la cónica y todos sus elementos.

b) Determine el ángulo que forman entre sí las rectas que son tangentes a la cónica en los puntos en los que ésta intersecta al eje y.

c) Grafique la cónica, identificando todos sus elementos, y las rectas del inciso anterior.

94. Indique ecuaciones paramétricas de una *hipérbola* de centro C (0,1), semiejes a=5 y b=2, y eje focal paralelo al eje y.

95. Determine la *familia de hipérbolas* cuyos vértices son V_1 (1,1) y V_2 (1,5).

2.9. SUPERFICIES

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

96. a) Halle la ecuación de la *superficie esférica* de centro C (3,0,4) y que pasa por el origen de coordenadas.

b) Halle la ecuación general del plano tangente a dicha esfera en el punto Q (8,0,4).

97. a) Dada la *superficie esférica* de centro en el origen de coordenadas y radio 2, determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección de dicha esfera con el plano $x + z - 2 = 0$. Represente gráficamente.

b) Indique la ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica que tiene por intersección con la superficie esférica, la curva encontrada en el inciso anterior.

c) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva que resulta de la proyección sobre el plano xy de la curva hallada en el inciso (a) y grafique.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando los comandos *Interseca Recorridos* y *Curva* del software GeoGebra.

98. Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuya directriz es: $9y^2 + 4z^2 = 36$, con $x = 0$, y su vértice es el punto V(12,0,0). Realice un gráfico cualitativo.

99. Halle la ecuación de la *superficie cilíndrica* de generatriz paralela al vector $\boldsymbol{v}$=(2,1,3) y cuya directriz es: $\begin{cases} (x-1)^2 + (z-1)^2 = 16 \\ y = 0 \end{cases}$. Realice un gráfico cualitativo.

100. Se desea construir una cubierta de generatriz parabólica para un estadio deportivo que cubra un espacio circular de 100 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 40m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho estadio. Grafique.

101. Dadas las ecuaciones:

i) $x^2 - y^2 - 6z = 0$; *ii*) $-49x^2 - 49y^2 + 25z^2 - 1225 = 0$; *iii*) $4y^2 + 36z^2 - 288x = 0$

a) Determine las intersecciones con los ejes coordenados, con los planos coordenados (*trazas*) y con planos paralelos a los planos coordenados.

b) Estudie las condiciones de simetría.

c) Represente gráficamente.

102. Indique *ecuaciones vectoriales paramétricas* de las curvas de intersección de la superficie dada por la ecuación: $-25x^2 - 25y^2 + 16z^2 + 400 = 0$ con cada uno de los siguientes planos:

i) $z = 10$; *ii*) $x + z = 0$

103. Dadas las siguientes *representaciones vectoriales paramétricas de superficies*, identifique para cada caso de qué superficie cuádrica se trata, a partir de la eliminación de los parámetros que las describen.

a) $\boldsymbol{r}(\alpha, \beta) = (5sen\alpha\ cos\beta\ ,\ 5sen\alpha\ sen\beta\ ,\ 5cos\alpha) \rightarrow \begin{cases} x = 5sen\alpha\ cos\beta \\ y = 5sen\alpha\ sen\beta \\ z = 5cos\alpha \end{cases}$

$0 \leq \alpha \leq \pi\ ; 0 \leq \beta \leq 2\pi$

b) $\boldsymbol{r}(\alpha, \beta) = (4\ cos\alpha\ sen\beta\ ,6\ sen\alpha\ sen\beta\ ,3\ cos\beta) \rightarrow \begin{cases} x = 4\ cos\alpha\ sen\beta \\ y = 6\ sen\alpha\ sen\beta \\ z = 3\ cos\beta \end{cases}$

$\alpha \in [0, 2\pi]$; $\beta \in [0, \pi]$

c) $\boldsymbol{r}(\alpha, \beta) = (5\, cos\alpha\, ch\beta\, , 2\, sen\alpha\, ch\beta\, , 7\, sh\beta) \rightarrow \begin{cases} x = 5\, cos\alpha\, ch\beta \\ y = 2\, sen\alpha\, ch\beta \\ z = 7\, sh\beta \end{cases}$

$0 \le \alpha \le 2\pi$; $-\infty < \beta < \infty$

104. Describa 5 aplicaciones en la ingeniería y/o en computación, de acuerdo a su carrera, de superficies en el espacio tridimensional.

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

105. Dada la ecuación de la *superficie esférica*: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 2 = 0$.

a) Indique las coordenadas del centro y radio.

b) Determine la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto A $(\sqrt{3} - 1 , 1 , 1)$.

106. a) Dado el casquete *esférico* $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$, con $z \geq 0$, determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección con el plano $-y + z - 3 = 0$. Grafique.

b) Indique la ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica cuya intersección con el casquete esférico es la curva encontrada en el inciso anterior. Represente gráficamente.

c) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva que resulta de la proyección sobre el plano xy de la curva hallada en el inciso (a). Grafique.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando los comandos *Interseca Recorridos* y *Curva* del software GeoGebra.

107. Halle la ecuación de la *superficie cilíndrica* que tiene como directriz la cónica $\begin{cases} (y-1)^2 = 8z \\ x = 0 \end{cases}$ y generatrices paralelas al vector $v = (1, 1, 2)$. Realice un gráfico cualitativo.

108. Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuya directriz es: $\begin{cases} (x-2)^2 + (z-1)^2 = 16 \\ y = 0 \end{cases}$

y su vértice es el punto V (0, 7, 0). Realice un gráfico cualitativo.

109. a) Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuya directriz es:

$$\begin{cases} 36(x-4)^2 + 16(y+6)^2 = 576 \\ z = 0 \end{cases}$$

y su vértice es el punto V(0, 0, 8). (no es necesario desarrollar la última expresión).

b) Sea la recta $L: (x, y, z) = (6, 0, -4) + t(1, 0, -2)$; $t \in \mathbb{R}$. Indique si la recta L está contenida o no en la superficie. Justifique su respuesta.

c) Indique la ecuación vectorial paramétrica del eje de la superficie cónica y determine el ángulo que forma dicho eje con el plano xy.

d) Realice un gráfico cualitativo.

110. a) Determine la ecuación de la *superficie de revolución* que tiene por generatriz una elipse en el plano *xz*, de semiejes a=5 y b=2 con centro en el origen de coordenadas y eje de revolución el eje x. b) Realice un gráfico cualitativo. c) Verifique su respuesta con el software GeoGebra, utilizando el comando *Superficie*.

111. a) Se desea construir una cubierta de generatriz *semielíptica* para un centro deportivo, que cubra un espacio circular de 120 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 30m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho centro deportivo. Grafique.

b) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva de intersección de la cubierta del estadio deportivo, con un plano horizontal a 10 metros de altura.

112. Una torre de enfriamiento de una central nuclear se ha diseñado a partir de un hiperboloide de revolución de 1 hoja de 60 m de altura, con eje de rotación vertical. Se sabe que la garganta tiene un diámetro de 30 m y se encuentra en un plano situado a 40 m de la base del hiperboloide donde el mismo tiene un diámetro de 142,4 m. a) Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la superficie que describe la torre de enfriamiento dada. b) Grafique. c) Verifique su respuesta con el software GeoGebra.

113. Dada la ecuación $\frac{(x)^2}{25}+\frac{(y)^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$

a) Determine las intersecciones con los ejes coordenados, con los planos coordenados (*trazas*) y con planos paralelos a los planos coordenados.

b) Estudie las condiciones de simetría.

c) Represente gráficamente.

114. Indique justificando su respuesta, si los ejes de las dos superficies cónicas dadas por los siguientes datos, son rectas paralelas, secantes o alabeadas. Represente gráficamente.

Superficie cónica 1: Directriz D_1: $\begin{cases} 4(x-10)^2+9(z-2)^2-36=0 \\ y=0 \end{cases}$

con vértice $V_1(10, 20, 2)$.

Superficie cónica 2: Directriz D_2: $\begin{cases} 16(x-3)^2+9(y-10)^2-144=0 \\ z=0 \end{cases}$

con vértice $V_2(3, 10, 20)$.

115. a) Indique *ecuaciones vectoriales paramétricas* de las curvas de intersección de la superficie dada por la ecuación: $49x^2 + 49y^2 + 9z^2 - 441 = 0$ con cada uno de los siguientes planos:

i) $y = 2$; *ii*) $x + y = 0$

b) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando el comando *Interseca Recorridos* del software GeoGebra.

116. Indique las ecuaciones correspondientes a las siguientes superficies cuádricas, con semiejes a, b y c. Represente gráficamente.

a) Hiperboloide de una hoja de revolución, con eje de revolución el eje y.

b) Paraboloide de revolución, con eje de revolución el eje x.

c) Elipsoide de revolución, con eje de revolución el eje z.

d) Hiperboloide de dos hojas de revolución, con eje de revolución el eje x.

117. Dadas las siguientes *representaciones vectoriales paramétricas de superficies*, identifique para cada caso de qué superficie cuádrica se trata, a partir de la eliminación de los parámetros que las describen. Luego utiliza el software GeoGebra para representar gráficamente.

a) $$\boldsymbol{r}(t\,,s) = (2\,t\ ,2s\,,t^2 - s^2\,) \rightarrow \begin{cases} x = 2\,t \\ y = 2\,s \\ z = t^2 - s^2 \end{cases} \qquad t \in R \quad ; \quad s \in R$$

b) $$\boldsymbol{r}(\beta\,,t) = (2\,t\,ch\beta\,,2\,t\,sh\beta\,,t^2\,) \rightarrow \begin{cases} x = 2\,t\,ch\beta \\ y = 2\,t\,sh\beta \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \geq 0 \quad ; \quad \beta \in R$$

c) Compare las superficies dadas por las *representaciones vectoriales paramétricas* indicadas en (a) y en (b)

d) $$\boldsymbol{r}(\alpha\,,\beta) = (5\,cos\alpha\,sen\beta - 2\,,2\,sen\alpha\,sen\beta - 2,9\,cos\beta + 2\,) \rightarrow \begin{cases} x = 5\,cos\alpha\,sen\beta - 2 \\ y = 2\,sen\alpha\,sen\beta - 2 \\ z = 9\,cos\beta + 2 \end{cases}$$

$\alpha \in [0, 2\pi)$; $\beta \in [0, \pi)$

e) $$\boldsymbol{r}(\alpha\,,t) = (3\,t\,cos\alpha + 3\,,5\,t\,sen\alpha + 3\,,t^2 - 2\,) \rightarrow \begin{cases} x = 3\,t\,cos\alpha + 3 \\ y = 5\,t\,sen\alpha + 3 \\ z = t^2 - 2 \end{cases}$$

$t \geq 0$; $\alpha \in [0, 2\pi)$

118. Indique ecuaciones para las siguientes familias, adoptando un parámetro apropiado. Represente en cada caso al menos tres superficies de cada familia:

a) Familia de esferas de centro (1,-3,5).

b) Familia de paraboloides de revolución de vértice V (0,3,0).

c) Familia de paraboloides de revolución de vértice variable, con eje de revolución el eje y.

2.10. COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

119. Determine la forma polar de las siguientes ecuaciones:

$y = 8x$; $x^2 + y^2 = 49$; $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$

120. En coordenadas polares la expresión analítica de cierta función es: $\rho = \frac{6}{1-cos\theta}$
Halle la expresión cartesiana rectangular de la misma e indique el nombre de la curva correspondiente.

121. Dada las funciones en coordenadas polares:

$\rho = \frac{6}{1+\frac{1}{2}cos\theta}$ $\rho = \frac{6}{1+cos\theta}$ $\rho = \frac{12}{2-sen\theta}$ $\rho = \frac{12}{2-4cos\theta}$

a) Indique para cada una de ellas, de qué cónica se trata, justificando su respuesta.

b) Represente gráficamente las cónicas, en coordenadas polares, indicando las coordenadas polares del centro y de los focos en cada uno de los casos.

122. Determine la ecuación en *coordenadas cartesianas*, en *coordenadas cilíndricas* y en *coordenadas esféricas* del plano que pasa por el origen de coordenadas y tiene como vector normal a (3, 2, 1).

123. Represente gráficamente las siguientes ecuaciones en *coordenadas cilíndricas*:

a) $\rho = 5$

b) $\theta = \pi/3$

c) $z = 5$

124. Escriba las ecuaciones en coordenadas polares y represente gráficamente las siguientes curvas:

a) Curvas de *trébol*.

b) *Limacon*.

c) *Lemniscatas*.

125. Deduzca las fórmulas de transformación que expresen coordenadas cilíndricas en términos de coordenadas rectangulares y viceversa.

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

126. Dada la ecuación expresada en coordenadas polares: $\rho\ (sen\varphi + cos\varphi) = 3$, escríbala en coordenadas cartesianas. Determine qué tipo de curva representa y grafique.

127. Determine las coordenadas polares del centro y el radio de la circunferencia de ecuación: $\rho^2 - 8\rho\cos(\varphi - 60^o) + 12 = 0$. Grafique.

128. Sea la ecuación $\rho = \frac{20}{4+4\cos\phi}$. a) Identifique la cónica que corresponde, indique los elementos fundamentales y encuentre las intersecciones con el eje polar y el eje a 90^o. b) Grafique. c) Verifique sus respuestas empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Cónicas en coordenadas Polares* [Capítulo 4, *Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

129. a) Identifique la cónica cuya ecuación en coordenadas polares es: $\rho = \frac{9}{6-3\cos\phi}$.

b) Determine los elementos fundamentales y halle las intersecciones con el eje polar y el eje a 90^o. c) Grafique. d) Verifique con el software GeoGebra, utilizando el comando *Curva*.

130. Determine la ecuación en coordenadas polares de una hipérbola con excentricidad e= 1.2, parámetro p=4 y directriz paralela al eje polar por debajo del polo. Represente gráficamente. Verifique sus respuestas (gráfica y analítica) empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Cónicas en coordenadas Polares* [Capítulo 4, *Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

131. Represente gráficamente las siguientes ecuaciones en *coordenadas esféricas*:

a) $\rho = 4$

b) $\theta = \pi/4$

c) $\varphi = \pi/3$

132. En una línea de producción, un brazo robótico se encarga de elevar autopartes. Dicho brazo robótico tiene tres grados de libertad (es decir, tres posibles movimientos): 1) puede ascender y descender entre 2 y 4 metros; 2) puede rotar sobre su eje de simetría; 3) puede extenderse (o "alargarse"). Se lo ha programado para que pueda alcanzar cualquier punto de la superficie cónica cuya ecuación está dada por:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 0$$

Calcule cuál será el largo total del brazo robótico extendido, cuando esté a una altura de 2,5 metros y haya girado un ángulo de 45° respecto del eje positivo de las abscisas. (Aporte del Ayudante Ad-honorem, alumno de Ing. en Mecatrónica O. Deshays).

2.11. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

133. Una cónica tiene por ecuación general $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$, obtenga:

a) La forma matricial de la ecuación de 2º grado.
b) La matriz asociada a la forma cuadrática.
c) El tipo de cónica a partir de los valores y vectores propios de la matriz asociada.
d) Los vectores propios y la nueva base.
e) La matriz de pasaje $\boldsymbol{P}$.
f) La matriz $\boldsymbol{A}$' respecto de la nueva base: $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}'$
g) La ecuación de la cónica en el sistema determinado por la nueva base.
h) Represente gráficamente.

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

134. Para cada una de las ecuaciones:

i) $x^2 + 2\,xy + y^2 - 8\sqrt{2}\,x + 8 = 0$

ii) $2x^2 - 4\,xy - y^2 + 8 = 0$

a) Indique la cónica que representa a través de los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.

b) Encuentre la matriz $\boldsymbol{P}$ que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática.

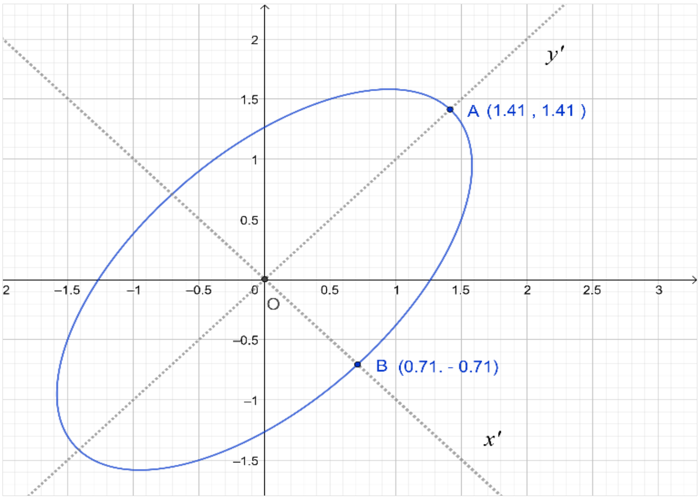
c) Encuentre la ecuación de la cónica referida al sistema rotado.

d) Calcule el ángulo que han rotado los ejes.

e) Represente gráficamente.

f) Verifique sus respuestas graficando con el software GeoGebra.

135. Teniendo en cuenta la información del siguiente gráfico, halle la ecuación de la elipse en el sistema coordenado xy.



2.12. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN TRES VARIABLES

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

136. Una cuádrica tiene por ecuación: $-x^2 + yz + 2x - 4z - 5 = 0$

Efectúe una transformación de coordenadas apropiada para llevar la cuádrica a su forma normal. Identifique la cuádrica y los nuevos ejes coordenados.

Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

137. Una cuádrica tiene por ecuación:

$5x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 16x + 4y - 4z + 19 = 0$

a) Indique la cuádrica que representa a través de los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.

b) Encuentre la matriz $\boldsymbol{P}$ que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática.

c) Encuentre la ecuación de la cuádrica referida al sistema rotado.

3. ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS.

Las siguientes actividades complementarias asociadas a cada una de las unidades didácticas en las que se estructura la asignatura, están destinadas al trabajo extra-áulico del estudiante. Se sugiere, previo a la realización de las mismas, elaborar las guías de autoevaluación correspondientes a cada eje temático incluidas en el texto de referencia, [*Raichman y Totter,* 2016]. Esto conducirá a un mejor aprovechamiento de las guías de autoevaluación y de las actividades complementarias como recursos que promueven el aprendizaje autónomo y la metacognición.

3.1. ESPACIOS VECTORIALES

C1. Indique justificando su respuesta cuáles de los siguientes conjuntos de vectores, constituyen una Base de $\mathbb{R}^2$.

a) $\{(-2, -2), (5, 5)\}$

b) $\{(1, 3), (-1, 2), (3, 27)\}$

c) {(-5, 12), (9, -8)}
d) {(1, 2, 5), (2, -3, 8)}

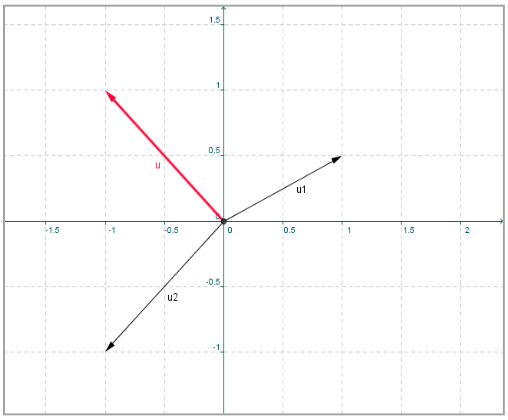
C2. Dados los vectores $\boldsymbol{a}$ = (0,3), $\boldsymbol{b}$ = (4,0), $\boldsymbol{c}$ = (-1,2)

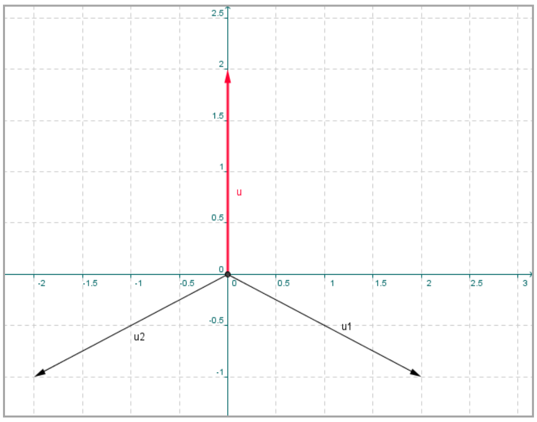
a) Evalúe las coordenadas del vector $\boldsymbol{u} = 3\,(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ en la base $B = \{\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c}\}$

b) Represente gráficamente los vectores.

c) Indique, justificando su respuesta, si los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{u}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

C3. a) A partir de los datos de cada una de las siguientes figuras, determine en cada caso, (I) y (II), las coordenadas del vector $\boldsymbol{u}$ en la base dada por los vectores $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$. Represente gráficamente.
b) Verifique su respuesta empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI - Cambio de base* en el Capítulo 1 del [*Libro Interactivo Geometría Dinámica*].





C4. Dados los vectores $\boldsymbol{w}$ = (2,4), $\boldsymbol{v}_1$ = (-1,-1) y $\boldsymbol{v}_2$ = (-0.5,0.5)

a) Evalúe las coordenadas del vector $\boldsymbol{w}$ en la base $B = \{\boldsymbol{v}_1;\ \boldsymbol{v}_2\}$ y represente gráficamente.

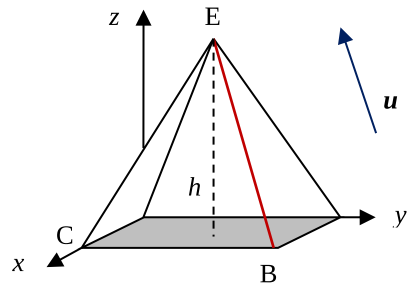
b) Evalúe las coordenadas del vector $\boldsymbol{u}$ sabiendo que $(\boldsymbol{u})_B$=(4,-3).

c) Verifique sus respuestas empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI-Cambio de base* en el Capítulo 1 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

3.2. VECTORES GEOMÉTRICOS. PRODUCTO ESCALAR

C5. En la Figura se muestra una pirámide regular, cuyas aristas miden 3 unidades cada una. Utilizando álgebra vectorial determine:

a) Las coordenadas del vértice E de la pirámide, siendo la arista BE paralela al vector $\boldsymbol{u} = (-3, -3, 3\sqrt{2})$.
b) La altura h de la pirámide.
c) El ángulo entre las aristas BE y CE.



C6. Dados los vectores: $\boldsymbol{w}$ = (4 , -2), aplicado en el punto A (-2,3) y $\boldsymbol{v}$ = (0.5 , 0.5), aplicado en el punto B (2,-3):

a) Determine el vector proyección de $\boldsymbol{w}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{v}$ y represente gráficamente.

b) Verifique su respuesta empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Proyección,* en el Capítulo 1 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

En dicho Recurso se designa componente de $\boldsymbol{w}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{v}$, al valor de k tal que:

$$\boldsymbol{proyw_v} = \boldsymbol{m} = k\,\boldsymbol{v} \text{ , es decir , } k = \frac{\boldsymbol{w}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$$

C7. Dado el vector $\boldsymbol{v}$=(6,2):

a) Determine las coordenadas de dicho vector en la base B_1={(3, -4);(4, 3)}

b) Represente gráficamente los vectores del inciso anterior. Interprete gráfica y analíticamente el vector $(\boldsymbol{v})_B$

c) Efectúe los cambios necesarios en los vectores de la base dada, para obtener una nueva base que resulte ortonormal. Justifique su respuesta.

C8. Dados los vectores: $\boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \boldsymbol{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \boldsymbol{c} = (0, 0, 1)$

a) Verifique que $B = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ es una *base ortonormal* de $\mathbb{R}^3$. Justifique su respuesta.

b) Determine las coordenadas del vector $\boldsymbol{v}$ = (4, 4, 8) en la base $B = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$

c) Indique, justificando su respuesta, si $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v}\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

d) Evalúe la *proyección ortogonal* del vector $\boldsymbol{v}$ en la dirección del vector **c.**

3.3. PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO

C9. Dados:

a) Tres vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$, no coplanares, **u**, **v** y $\boldsymbol{w}$, demuestre la forma de calcular el volumen del paralelepípedo que tiene a los tres vectores como aristas concurrentes.

b) Los puntos A(2, 2, 1) m, B(4, 3, 2) m, C(2, 4, 2) m y D(2, 2, 4)m, calcule el volumen del tetraedro de aristas ***AB***, ***AC*** y ***AD.***

c) Calcule el ángulo entre los vectores ***AC*** y ***AD***.

C10. Dados los puntos A (0, 0, 0) m, B (3, 0, 6) m, C (- 3, 0, 6) m y D (0, 9, 0) m, usando vectores y las operaciones apropiadas, evalúe:

a) El área del triángulo de vértices A, B y C.

b) El volumen del prisma de base triangular de aristas AB, AC y AD.

c) Indique, justificando su respuesta, si {**AB**, **AC**, **BC**} es conjunto LD o LI.

3.4. PLANOS Y RECTAS

C11. a) Deduzca una expresión que permita determinar la distancia más corta de un punto dato P_o (x_o, y_o, z_o) al plano de ecuación: $Ax+By+Cz+D = 0$

b) Calcule la distancia del origen de coordenadas al plano cuya ecuación vectorial paramétrica está dada por: $\boldsymbol{OP} = (2, 6, 1) + \mu\,(1, 0, 1) + \beta\,(2, 3, 0)$. $\mu, \beta \in \mathbb{R}$

c) Encuentre la ecuación de un plano que diste 4 unidades del plano cuya ecuación general es π: $-x + 2y + 2z + 3 = 0$. ¿Es único el plano hallado?

C12. Dados los planos: π_1: $3x - 2z + 4 = 0$; π_2: $y + z + 3 = 0$

a) Determine la ecuación de la familia de planos que pasa por la intersección de los planos dados.

b) Halle la ecuación del plano π_3 que pasa por la intersección de los dos planos dados y además pasa por el punto Q (0,0,7)

c) Complete la expresión: El plano π_1 es ..... al eje y; El plano π_2 es ..... al plano yz.

d) Represente gráficamente los planos π_1, π_2, π_3 y verifique las respuestas dadas en el inciso anterior

C13. Dada la función $y=f(x)$, real y continua en el intervalo $[x_A , x_B]$, en el que $f(x)$ tiene un cero. (es decir: $f(x_A).f(x_B)<0$)

a) Obtenga la ecuación de la recta L que une los puntos A (x_A, y_A) y B (x_B, y_B) de la curva.

b) Determine la abscisa para la cual la recta L del inciso anterior intersecta al eje de las abscisas x.

c) Indique sobre qué intervalo repetiría el procedimiento indicado en los incisos a) y b) para obtener una mejor aproximación a la raíz de $f(x) = 0$

C14. Dada la función $y=f(x)$, real y continua en el intervalo $[x_A , x_B]$, en el que $f(x)$ tiene un cero. (es decir: $f(x_A).f(x_B)<0$).

a) Obtenga la ecuación de la recta L tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto A(x_A , y_A)

b) Determine la abscisa para la cual la recta L del inciso anterior intersecta al eje de las x.

c) Indique un procedimiento para obtener una mejor estimación de la raíz de $f(x)= 0$.

C15. Dadas las siguientes rectas: $L_1\colon\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -4-\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $L_2\colon\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

a) Encuentre la ecuación vectorial paramétrica y las ecuaciones simétricas de la recta L_2. Identifique los números directores.

b) Indique justificando su respuesta, si las rectas dadas son paralelas, secantes o alabeadas

c) Determine la ecuación de un plano paralelo a las rectas L_1 y L_2 y que diste $\sqrt{\mathbf{32}}$ del punto Q (1, 0, 0). ¿Es único dicho plano?

d) Determine la proyección del punto R (24, 12, 36) sobre el plano *xy*, paralelamente a la recta L_2

C16. Dadas las siguientes rectas: L_1: (x, y, z) = (0, 6, 2) + μ (0, -2, 2) $\mu \in \mathbb{R}$

L_2: (x, y, z) = (12, 2, 4) + β (0, 1, 2) $\beta \in \mathbb{R}$

a) Determine la distancia entre las rectas dadas L_1 y L_2.

b) Determine las coordenadas del punto R de intersección de la recta L_2 con el plano *xy*.

c) Determine la ecuación de un plano π_1 perpendicular a la recta L_1 y que se encuentra a $\sqrt{2}$ unidades del punto Q (2,1,1). ¿Es único dicho plano?

C17. Dada la recta L_1 que pasa por el punto P_1 (1.5,0,0) y tiene por vector director a $\boldsymbol{u}$ = (0,-5,3), y el plano π_1 que pasa por Q (-4,3,4) y cuyo ventor normal es $\boldsymbol{n}$ = (5,0,0):

a) Determine la posición relativa entre la recta y el plano dados y represente gráficamente.

b) Verifique su respuesta empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI– Posiciones relativas entre recta y plano,* contenido en el Capítulo 2 del [*Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

C18. Dada la recta L_1 que pasa por el punto P_1 (5,0,5) y tiene por vector director a $\boldsymbol{d}_{L_1}$ = (5,0,0) y la recta L_2 que pasa por el punto P_2 (5,5,0) y tiene por vector director a $\boldsymbol{d}_{L_2}$ = (3,-3,0),

a) Determine la posición relativa entre las rectas dadas y represente gráficamente.

b) Verifique su respuesta empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI– Posiciones relativas entre rectas,* contenido en el Capítulo 2 del [*Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

C19. La Figura muestra una estructura de acero definida por los puntos:
A(0, 0, 12)m; B(6, 0, 12)m; C(0, 0, 0)m; D(6, 0, 0)m; E(6, -6, 0)m; F(0, -6, 0) y H(3, 0, 12)m.

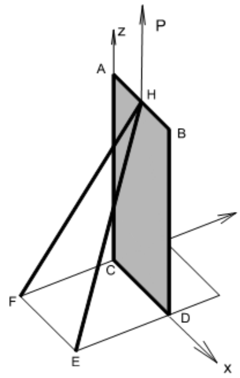
a) Obtenga la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos F, E y H. Indique la posición relativa entre π_1 y el eje *z*.

b) Indique la posición relativa entre las rectas L_1 y L_2, siendo L_1 la recta que pasa por H y E, y L_2 la recta paralela al eje z que pasa por D.

c) Para las rectas L_1 y L_2, encuentre su punto de intersección, o la distancia mínima entre ellas, según corresponda. (Exprese su respuesta aproximando con un decimal).

d) Encuentre el ángulo entre el panel ABCD y la recta $L1$.

En todos los casos, justifique su respuesta utilizando operaciones exclusivamente vectoriales.



3.5. CIRCUNFERENCIAS

C20.

a) Escriba la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por la intersección de las circunferencias:

$C_1: x^2 + y^2 - 8x + 8y + 7 = 0$ y $C_2: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$

b) Determine la ecuación de la circunferencia C_3 que pertenece a dicha familia y cuyo centro se encuentra sobre el eje x.

c) Halle la ecuación del eje radical de las dos circunferencias dadas y evalúe la longitud de la cuerda común a las mismas.

d) Verifique, gráfica y analíticamente, que el eje radical es perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias dadas.

C21. Demuestre que la recta tangente a una circunferencia de centro C(h,k) y radio r, en un punto cualquiera T (x_T,y_T), es perpendicular al segmento de recta que une el centro C con el punto de tangencia T.

C22. Halle la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es C (2, −4) y es tangente a la recta $L: x - y = 0$. Represente gráficamente.

C23. Determine gráfica y analíticamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia de ecuación $C_1: x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$ que pasan por el punto exterior Q (-7,-3).

3.6. PARÁBOLAS

C24. Determine los elementos de las parábolas dadas por las siguientes ecuaciones y represente gráficamente:

a) $x^2 = 12y$

b) $y^2 = 16x$

c) $(x-3)^2 = -8(y-4)$

d) $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$

C25. Halle el lugar geométrico de la cónica tal que la distancia desde uno cualquiera de sus puntos hasta el punto R (1,4) sea la misma que la distancia hasta la recta L de ecuación L: $y - 6 = 0$. Represente gráficamente.

C26. Se cuenta con un terreno de un ancho disponible de 70 m para desarrollar la cubierta parabólica de un estadio polideportivo.

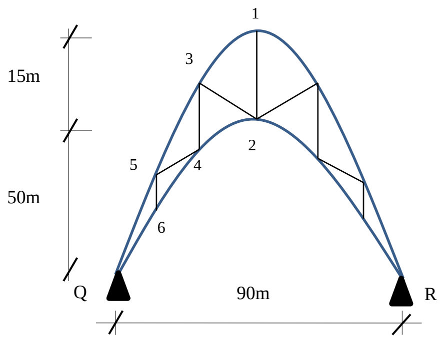
a) ¿Cuál es la altura que alcanzará el arco en su centro si el lado recto de la parábola que lo representa es de 100 m?

b) ¿A qué distancia de los extremos es posible colocar una estructura de 6 m de altura?

c) Indique ecuaciones paramétricas que permitan describir al arco y halle con las mismas la altura de un punto situado a 10 m del centro.

C27. Determine la familia de parábolas de eje focal coincidente con el eje y y cuyo vértice es el punto V (0,4).

C28. La estructura reticulada de la figura está formada por dos arcos parabólicos y posee una longitud entre los apoyos Q y R de 90m. La altura máxima de ambos arcos es de 50m y 65m respectivamente. Los montantes verticales se encuentran a una distancia horizontal de 15m entre sí.



a) Seleccione un sistema de coordenadas apropiado y determine las ecuaciones de los dos arcos.

b) Calcule la longitud de los montantes 3-4, 5-6 y la longitud de la diagonal 4-5.

c) Utilice el software GeoGebra para verificar sus respuestas.

3.7. ELIPSES E HIPÉRBOLAS

C29. Halle la ecuación general de una elipse, cuyo centro es C (1, 1), uno de sus vértices es V (1, 6) y su excentricidad vale 0,6. Represente gráficamente, indicando sus elementos.

C30. La base de un arco semielíptico tiene 22 metros de amplitud, en tanto que la altura en correspondencia con el eje de simetría es de 8 metros.

a) Seleccione un sistema de coordenadas adecuado y determine la ecuación que representa la forma del arco.

b) Calcule la altura del arco en correspondencia con los focos.

c) Determine el valor de la pendiente de la recta tangente estando a 2 metros de uno de los extremos.

d) Represente gráficamente.

C31.Una cúpula antigua tiene una sección vertical semielíptica. La amplitud de la base de dicha sección vertical es de 14 m y su altura en correspondencia con el eje de simetría es de 4 m. Si un ingeniero se sitúa en uno de sus focos ¿a qué altura se encuentra la cúpula? Represente gráficamente.

C32. Determine la familia de elipses cuyos focos son: F_1 (3,-2) y F_2 (3,6).

C33. Verifique la respuesta dada en el ejercicio C23 con la ayuda del *Recurso Geométrico Interactivo RGI – Tangentes a una elipse por un punto exterior,* contenido en el Capítulo 4 del Libro Interactivo Geometría Dinámica.

C34. Determine gráfica y analíticamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse E por el punto exterior Q (10,4). La elipse E es tal que sus focos son los puntos F_1 (-4,5) y F_2 (2,5) y pasa por el punto P_0 (2,2). Verifique la respuesta con la ayuda del *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Tangentes a una elipse por un punto exterior*, contenido en el Capítulo 4 del Libro Interactivo Geometría Dinámica.

C35. Halle la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (3, −1), su centro es el origen, su eje focal es el eje x y una de sus asíntotas es la recta L: $2x + 3\sqrt{2}y = 0$. Grafique.

C36. Dada la ecuación**:** $x^2 - y^2 + 4x - 4y - 4 = 0$

a) Identifique la cónica y todos sus elementos.

b) Determine el ángulo que forman las rectas L_1 y L_2, siendo L_1 y L_2 las rectas tangentes a la cónica en los puntos en los que ésta intersecta a la cuerda focal que pasa por el foco de menor abscisa.

c) Grafique la cónica (indicando todos sus elementos) y las rectas L_1 y L_2.

d) Verifique sus respuestas representando gráficamente la cónica con el software GeoGebra y utilizando los *Comandos Tangente* y *Ángulo*.

C37. Halle la ecuación y los elementos de la hipérbola de centro en C (3, 2), foco en F (13, 2) y de excentricidad 5/4. Represente.

C38. Dada la ecuación cuadrática: $9x^2 - 16y^2 - 36x + 64y - 172 = 0$

a) Identifique la cónica y todos sus elementos.

b) Determine el ángulo que forman entre sí las rectas tangentes a la cónica, L_2 y L_3, en los puntos de intersección de la misma con la recta L_1: $y = 6$

c) Grafique la cónica y las rectas L_1, L_2 y L_3 .

C39. Determine gráfica y analíticamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola *H* por el punto exterior Q (0,6). La hipérbola *H* es tal que sus focos son los puntos F_1 (3,1) y F_2 (-2,1) y pasa por el punto P_0 (-2,-1). Verifique la respuesta con la ayuda del *Recurso Geométrico Interactivo RGI – Tangentes a una hipérbola por un punto exterior*, contenido en el Capítulo 4 del Libro Interactivo Geometría Dinámica.

C40. Deduzca una expresión que permita calcular el lado recto de una hipérbola de centro C (h,k), semiejes a y b y eje focal paralelo al eje *y*.

C41. Evalúe la pendiente de la recta tangente en un punto extremo de un lado recto para la parábola, la elipse y la hipérbola. ¿Qué conclusiones obtiene?

C42. Dada la elipse de centro en el origen de coordenadas y eje focal el eje de abscisas verifique la *propiedad de reflexión* en un punto extremo del lado recto correspondiente al foco F_1 (c,0).

3.8. SUPERFICIES

C43. Utilice los Recursos Geométricos Interactivos contenidos en el Capítulo 5 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica* para estudiar y comparar las *superficies cuádricas* con y sin centro. Elabore un cuadro comparativo que sintetice sus conclusiones.

C44. Identifique las siguientes superficies cuádricas (dar el nombre e indicar si se trata de una superficie cuádrica con o sin centro). Represente gráficamente.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2z$

c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$

d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$

e) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z$

C45. Represente gráficamente las siguientes *superficies cuádricas*, indicando en cada caso sus trazas y si se trata o no de una *cuádrica de revolución*. Justifique apropiadamente sus respuestas y verifique las mismas utilizando los *Recursos Geométricos Interactivos RGI – Superficies*, del Capítulo 5 del Libro Interactivo Geometría Dinámica.

a) Elipsoide de semiejes a=8, b=4, c=5

b) Hiperboloide de una hoja de semiejes a=3, b=3, c=2.5

c) Hiperboloide dos hojas de semiejes a=1.5, b=2, c=1.5

d) Paraboloide elíptico de semiejes a=1.75, b=1.25, c=4

e) Paraboloide hiperbólico de semiejes a=1.5, b=1.5, c=3

C46. Se desea construir una cubierta de generatriz semielíptica para un centro cultural, que cubra un espacio circular de 100 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 40m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho centro cultural.

C47. a) Dada la superficie $x^2 + y^2 = -4\ (z - 3)$, con $z \geq 0$, determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección con el plano $x + 3z - 8 = 0$.

b) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva que resulta de la proyección sobre el plano xy de la curva hallada en el inciso (a).

c) Represente gráficamente.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando los comandos *Interseca Recorridos* y *Curva* del software GeoGebra.

C48. Realice las actividades indicadas en el *Recurso Geométrico Interactivo RGI – Paraboloide Hiperbólico* del Capítulo de *Superficies y Secciones*, Capítulo 6 del Libro Interactivo Geometría Dinámica.

3.9. COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

C49. Determine la ecuación en coordenadas polares de una elipse con excentricidad e= 0.8, parámetro p=5 y directriz perpendicular al eje polar a la derecha del polo. Represente gráficamente. Verifique sus respuestas (gráfica y analítica) empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Cónicas en coordenadas Polares*, incluído en el Capítulo 4 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

C50. Determine la ecuación en coordenadas polares de una parábola con, parámetro p=4.4 y directriz paralela al eje polar debajo del polo. Represente gráficamente. Verifique sus respuestas (gráfica y analítica) empleando el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Cónicas en coordenadas Polares*, incluido en el Capítulo 4 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

C51. Deduzca las fórmulas de transformación que expresen coordenadas cilíndricas en términos de coordenadas rectangulares y viceversa.

C52. Trace la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en *coordenadas cilíndricas*:

a) $\rho = 10$

b) $\theta = \pi/6$

c) $z = 10$

C53. Dada la ecuación en coordenadas cilíndricas: $\rho(2cos\theta + 5sen\theta) + 8z = 0$

a) Obtenga la ecuación en coordenadas cartesianas

b) Obtenga la ecuación en coordenadas esféricas

c) Represente gráficamente.

3.10. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN DOS Y TRES VARIABLES

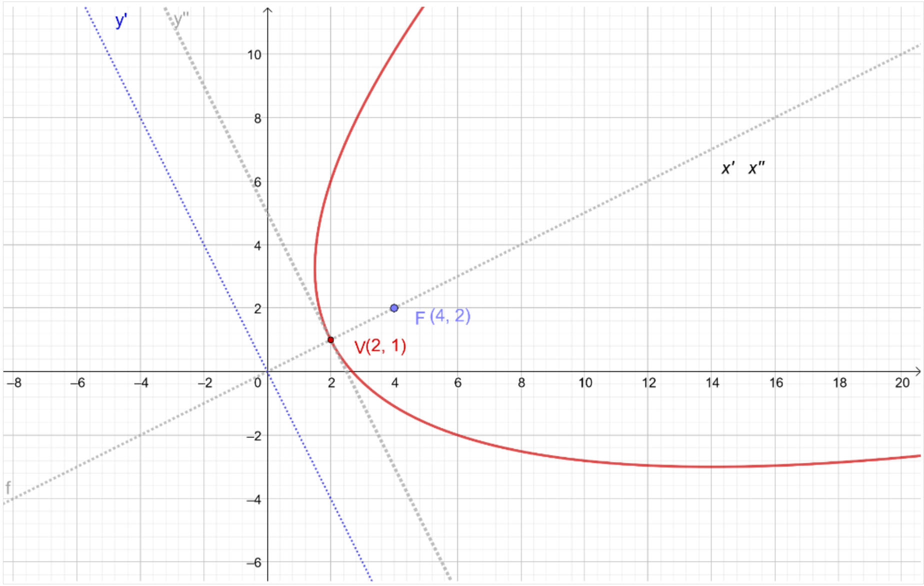
C54. Dada la ecuación cuadrática: $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 10 = 0$

Halle un sistema de coordenadas respecto del cual la cónica tenga su forma normal, halle la forma normal, identifique la cónica y grafíquela.

C55. Para los siguientes valores y vectores propios correspondientes a la matriz de la forma cuadrática asociada a la ecuación de una cónica, y los datos indicados de dicha ecuación en el sistema coordenado xy: identifique la cónica, indique la ecuación de la misma en el nuevo sistema coordenado y represente gráficamente λ_1=4 y λ_2=-3

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \dots ; \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{K} = [-2\sqrt{2} \quad 3\sqrt{2}] \quad ; \quad f = 24$$

C56. Teniendo en cuenta la información del siguiente gráfico, halle la ecuación de la cónica en el sistema coordenado xy.



C57. Dada la ecuación cuadrática: $2xy - z = 0$

Halle un sistema de coordenadas respecto del cual la cuádrica tenga su forma normal, halle la forma normal, identifique la superficie cuádrica y grafíquela.

C58. Para los siguientes valores y vectores propios correspondientes a la matriz de la forma cuadrática asociada a la ecuación de una superficie cuádrica, y los datos indicados de dicha ecuación en el sistema coordenado *xyz*: identifique la superficie, indique la ecuación de la misma en el nuevo sistema coordenado y represente gráficamente en el nuevo sistema coordenado.

$$\lambda_1=-3 \ ; \ \lambda_2=4 \ ; \ \lambda_3=5 \ ; \ \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}; \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}; \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{K} = [6 \quad 0 \quad 0] \ ; \ j = 33$$

4. TRABAJO INTEGRADOR DE CONTENIDOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

4.1. INTRODUCCIÓN

A partir de la resolución de un problema de aplicación de interés, en este Trabajo Integrador de Contenidos de Geometría Analítica, se busca que los estudiantes:

- Planifiquen y desarrollen estrategias para la resolución de problemas geométricos a partir de la identificación de los datos, la representación de los mismos y el establecimiento de relaciones, integrando los conocimientos adquiridos en una situación problema concreta.
- Analicen e interpreten resultados.
- Sean metódicos en la exposición y en el registro de la información;
- Se comuniquen con precisión y claridad en forma oral y escrita.

El problema integrador se refiere al cierre de un espacio definido por una planta dada, en el que se trabaja en una primera etapa con dos cubiertas planas, formulando problemas que incluyen contenidos de vectores, rectas y planos. Se plantea luego la necesidad de utilizar un paraboloide hiperbólico para dicha cubierta, involucrando contenidos referidos a cónicas y superficies cuádricas.

A medida que se avanza en los desarrollos de los contenidos del curso, el estudiante resuelve cada parte del problema integrador, cuyas respuestas podrá ir cotejando con las incluidas al final de este documento. Así mismo se sugiere al estudiante la materialización de un modelo en escala reducida, (maqueta), a los efectos de visualizar apropiadamente cada aspecto del problema y para ir corroborando los resultados obtenidos en las resoluciones gráficas y analíticas.

La realización del Trabajo Integrador de Contenidos durante el desarrollo del curso promueve el aprendizaje significativo para un mejor rendimiento en las instancias de evaluaciones parciales durante el cursado. Por otra parte, el examen final de la asignatura es una instancia de evaluación planteada como una actividad de síntesis e integradora de los contenidos. La condición de aprobación del examen final implica el dominio de los contenidos conceptuales y procedimentales de todas las unidades temáticas del programa de la asignatura, así como también de las aplicaciones prácticas y la articulación de contenidos entre sí, trabajados durante el cursado.

4.2. DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO INTEGRADOR DE CONTENIDOS.

Se necesita realizar el cerramiento de un espacio cuya planta (proyección sobre el plano *xy*) tiene forma romboidal de diagonales iguales de longitudes $2a$ (ver Figura 4.1.a). Se tienen 4 puntales de longitud fija igual a 3,0 m cada uno de ellos, que se designan del siguiente modo, tal como muestra la Figura 4.1.b:

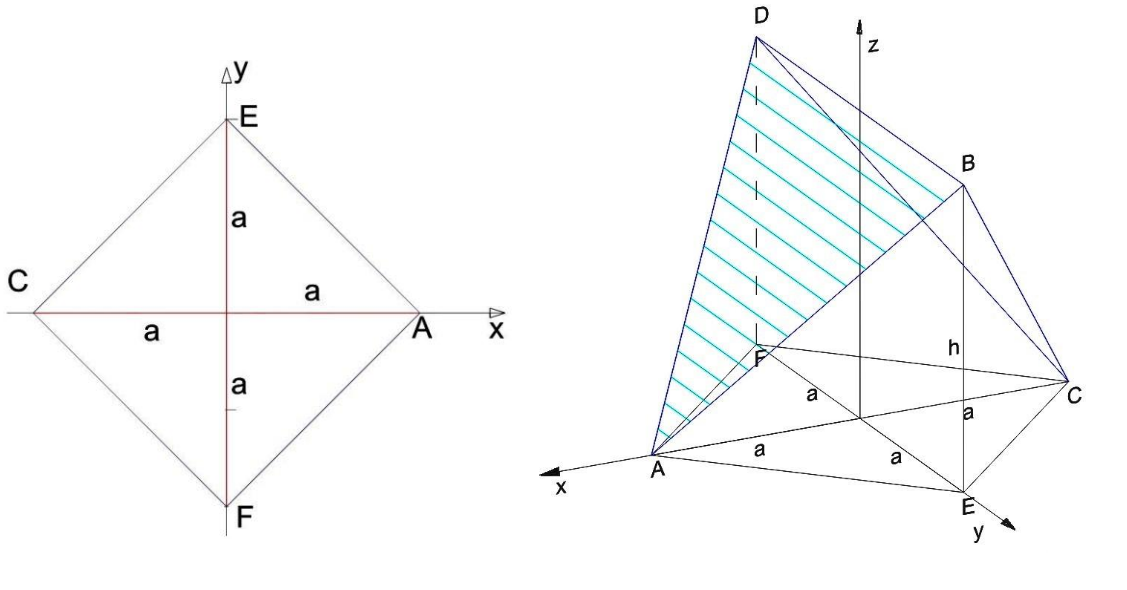
Puntal 1: se extiende desde el punto A hasta el punto B.

Puntal 2: se extiende desde el punto B hasta el punto C.

Puntal 3: se extiende desde el punto C hasta el punto D

Puntal 4: se extiende desde el punto D hasta el punto A.

Desde los puntos B y D se extienden pasando por A y por C dos cubiertas planas. Las paredes también serán superficies planas.



a) Vista en Planta b) Puntales y selección del sistema de coordenadas

Figura 4.1.

4.3. Parte I: VECTORES

I.a. Recordando que los puntales tienen longitud fija y considerando que la altura del punto B(h) es igual a la longitud de la diagonal de la base romboidal, determine la posición de los extremos de los mismos (puntos A, B, C y D) para lograr un volumen interior de $2\sqrt{6}$ m^3.

I.b. Determine la longitud de las diagonales de la base romboidal.

I.c. Determine el área de las 2 cubiertas planas que se delimitan entre los puntos A, B y D y entre los puntos C, B y D.

I.d. Determine el ángulo que forman todos los puntales entre sí.

4.4. Parte II: PLANOS

II.a. Determine las ecuaciones de los planos donde estarán contenidos los puntos de las 2 hojas que componen la cubierta. (ver Figura 4.2).

II.b. Determine el ángulo que forman dichos planos entre sí.

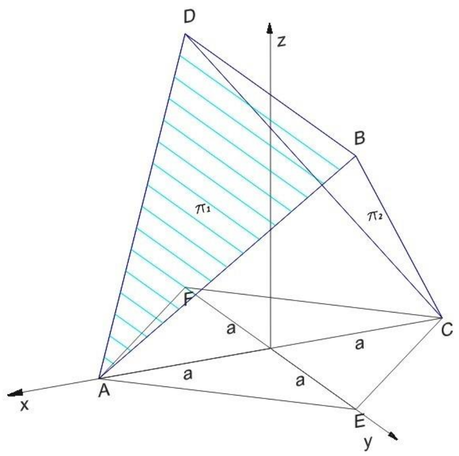


Figura 4.2.

II.c. Escriba la ecuación de la familia de planos que pasa por la intersección de ambos planos.

II.d. Determine la ecuación del plano que pertenece a la familia de planos que pasa por la intersección de ambos planos y que sea plano bisector de los mismos. Identifique qué plano resulta.

II.e. Determine la distancia desde el centro del espacio interior (origen de coordenadas) hasta las cubiertas.

II.f. Determine en cada cubierta cuál es el punto del plano desde donde se mide dicha distancia.

Parte III: RECTAS

III.a. Determine las ecuaciones de las 4 rectas que contienen a los puntales. Llamaremos L_1 a la recta que contiene al puntal 1, L_2 la que contiene al puntal 2, L_3 la que contiene al puntal 3 y L_4 a la recta que contiene al puntal 4.

III.b. Identifique la posición relativa de estas 4 rectas entre sí, tomadas de a pares.

III.c. Determine el ángulo que forman dichas rectas, tomadas de a pares.

III.d. i) Determine la distancia entre las mismas, tomadas de a pares. ii) Encuentre los puntos en cada recta desde donde se miden las distancias calculadas.

III.e. i) Encuentre la intersección de las rectas L_1 y L_3 con el plano $z = \sqrt{6}/2$ (llamaremos a estos puntos M a la intersección entre el plano y L_1 y P a la intersección del plano con L_3). ii) Encuentre la intersección de las rectas L_1 y L_3 con el plano $z = \sqrt{6}/4$ (llamaremos a estos puntos K en L_1 y R en L_3). iii) Encuentre la intersección de las rectas L_1 y L_3 con el plano $z = 3\sqrt{6}/4$ (llamaremos a estos puntos N a la intersección con L_1 y Q a la intersección entre el plano y L_3). Represente gráficamente.

III.f. Halle las distancias entre los puntos N y R, entre M y P y entre K y Q.

III.g. Llamaremos L_5 a la recta que pasa por los puntos N y R, L_6 a la recta que pasa por los puntos M y P y L_7 a la recta que pasa por los puntos K y Q. Determine las ecuaciones de estas 3 rectas.

4.6. Parte IV: SECCIONES CÓNICAS

Por motivos arquitectónicos y de optimización del tiempo de montaje y simplificación de dicho proceso, se ha decidido cambiar las superficies planas que formaban la cubierta por una superficie cuádrica denominada paraboloide hiperbólico. Sabiendo que la intersección de dicha superficie con los planos coordenados *xz* e *yz*, son parábolas, (ver Figura 4.3.) es necesario resolver lo siguiente:

IV.a. Determine las ecuaciones de las parábolas mencionadas, de modo tal que la altura interior sea $\sqrt{6}/2$. Halle los elementos característicos de las parábolas determinadas. Al vértice común de ambas parábolas le llamaremos V.

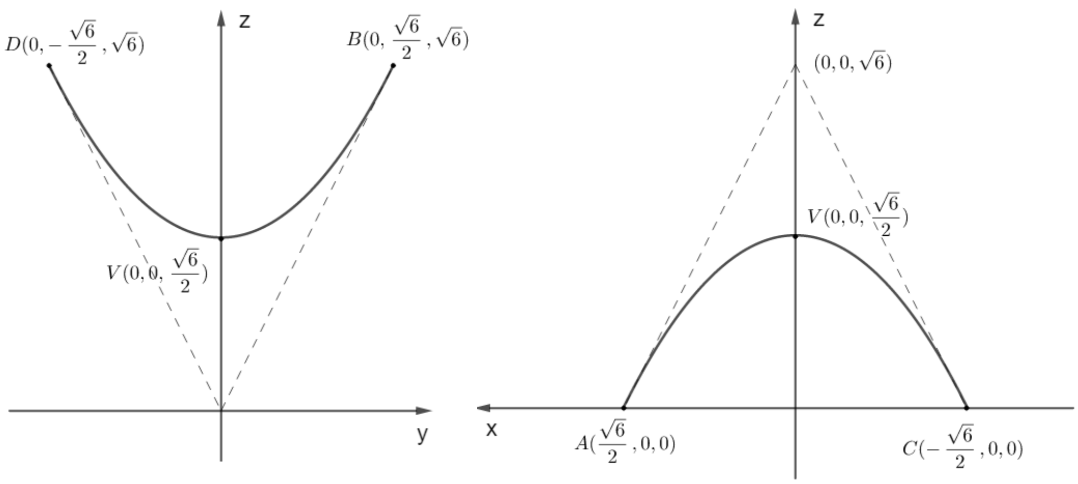


Figura 4.3.a

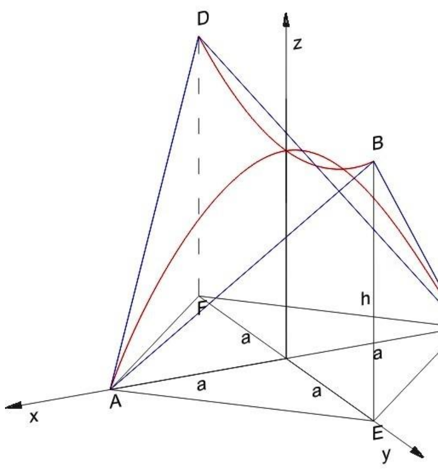


Figura 4.3.b

IV.b. Esta cubierta a construir se halla debajo de una línea Eléctrica de Media Tensión que puede ser modelizada a través de una recta, a la que llamaremos L_8. Sabemos que esta recta pasa por los puntos (5,0,7) y (-7, 0, 10). Determine la mínima distancia entre la recta L_8 y la parábola que pasa por los puntos A y C (contenida en el plano *xz*) y verifique que es superior a los 3m exigidos como distancia de seguridad.

4.7. Parte V: SUPERFICIES CUÁDRICAS

V.a. Halle la ecuación de la superficie cuádrica que contiene a la cubierta en estudio (Figura 4.4.)

V.b. Determine la intersección de la superficie con el plano $z = \sqrt{6}/2$.

V.c. Indique si las rectas L_5, L_6 y L_7 del problema III.e pertenecen o no a la superficie cuádrica. Justifique apropiadamente su respuesta.

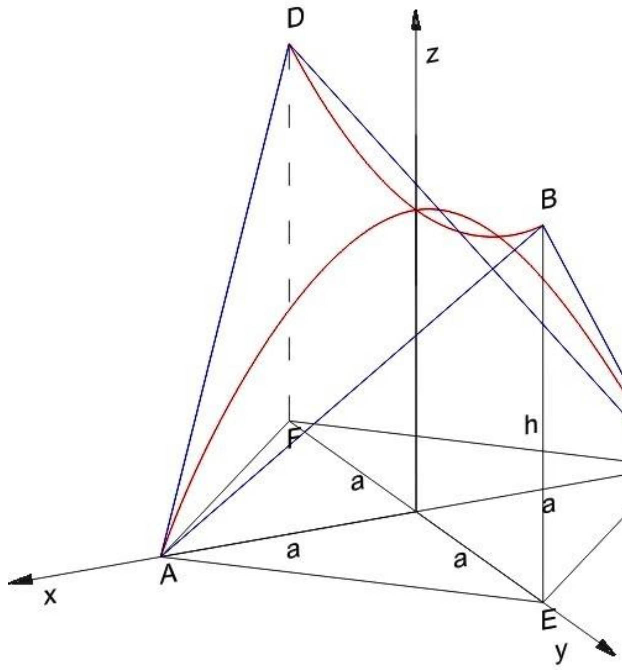


Figura 4.4.

4.8. Parte VI: COORDENADAS ESFÉRICAS

VI.a. Determine las ecuaciones del paraboloide hiperbólico en coordenadas esféricas.

VI.b. Determine las coordenadas de los puntos A, B, C y D en el sistema de referencia planteado.

VI.c. Determine las coordenadas de los siguientes puntos pertenecientes a la superficie.

Punto	ρ	φ	Θ
S_1		$\pi/6$	0
S_2		$\pi/4$	0
S_3		$2\pi/3$	0
S_4	1,732		$\pi/4$
S_5	1,268	$\pi/4$	
Punto M			

4.9. RESPUESTAS.

Parte I: Vectores

I.a. *Posición de los extremos de los puntales* (puntos A, B, C y D) para lograr un volumen interior de $2\sqrt{6}$ m³ :

$A(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, 0)$; $B(0, \frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6})$; $C(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, 0)$; $D(0, -\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6})$

Otros puntos:

$E(0, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$; $F(0, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$

I.b. *Longitud de las diagonales de la base romboidal*: $2a = \sqrt{6}$

I.c. *Área de las 2 cubiertas planas*: Área = $3\sqrt{5} \cong 6{,}7082$ m²

I.d. *Ángulo que forman los puntales entre sí*:

Puntales:

Puntal 1: $\boldsymbol{AB} = \sqrt{6}(-1/2, 1/2, 1)$ Puntal 2: $\boldsymbol{AD} = \sqrt{6}(-1/2, -1/2, 1)$

Puntal 3: $\boldsymbol{CB} = \sqrt{6}(1/2, 1/2, 1)$ Puntal 4: $\boldsymbol{CD} = \sqrt{6}(1/2, -1/2, 1))$

Ángulos:

$\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{CB}$: $\varphi_{12} = \arccos(2/3) = 48^{o}\ 11`\ 23``\ (0{,}841\ rad)$

$\boldsymbol{CB}$ y $\boldsymbol{CD}$: $\varphi_{23} = \arccos(2/3) = 48^{o}\ 11`\ 23``(0{,}841\ rad)$

$\boldsymbol{CD}$ y $\boldsymbol{AD}$: $\varphi_{34} = \arccos(2/3) = 48^{o}\ 11`\ 23``(0{,}841\ rad)$

$\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AD}$: $\varphi_{14} = \arccos(2/3) = 48^{o}\ 11`\ 23``(0{,}841\ rad)$

$\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{CD}$: $\varphi_{13} = \arccos(1/3) = 70^{o}\ 31`\ 43{,}61``(1{,}23\ rad)$

$\boldsymbol{CB}$ y $\boldsymbol{AD}$: $\varphi_{24} = \arccos(1/3) = 70^{o}\ 31`\ 43{,}61``(1{,}23\ rad)$

Parte II : Planos

II.a. *Ecuaciones de los planos* donde estarán contenidos los puntos de las 2 hojas que componen la cubierta: $\pi_1: x + \frac{1}{2}z - \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$

$$\pi_2: -x + \frac{1}{2}z - \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$$

II.b. *Ángulo que forman dichos planos entre sí*:

$\theta_{12} = \arccos\left(-3/5\right) = 126^{o}\ 52`\ 11{,}63``$

Observación: Si $\pi_2: x - \frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$, $\theta_{12} = \arccos\left(3/5\right) \cong 53^{o}$

II.c. *Ecuación de la familia de planos que pasa por la intersección de ambos planos*:

Familia completa: $k_1\left(x + \frac{1}{2}z - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + k_2\left(-x + \frac{1}{2}z - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0\ ;\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Familia reducida: $\left(x + \frac{1}{2}z - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + k\left(-x + \frac{1}{2}z - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0\ ;\ k \in \mathbb{R}$

$(1-k)x + (1+k)\frac{1}{2}z - (1+k)\frac{\sqrt{6}}{2} = 0\ ;\ k \in \mathbb{R}$

II.d. *Ecuación del plano que pertenece a la familia de planos que pasa por la intersección de ambos planos y que sea plano bisector de los mismos*.

$x = 0$ (plano yz)

II.e. *Distancia desde el centro del espacio interior (origen de coordenadas) hasta las cubiertas*:

$$d = \|\boldsymbol{OP_1}\| = \frac{\sqrt{6}\sqrt{5}}{5} = \sqrt{\frac{6}{5}} \cong 1{,}09 \text{ m}$$

II.f. *Puntos de los planos desde donde se mide dicha distancia*:

$$en\ \pi_1 :\ P_1 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}, 0, \frac{\sqrt{6}}{5}\right)$$

$$en\ \pi_2 :\ P_2 = \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}, 0, \frac{\sqrt{6}}{5}\right)$$

Parte III: Rectas

III.a. *Ecuaciones de las 4 rectas que contienen a los puntales.*

Llamaremos L1 a la recta que contiene al puntal 1, L2 la que contiene al puntal 2, L3 la que contiene al puntal 3 y L4 a la recta que contiene al puntal 4:

$L_1: (x, y, z) = \left(\sqrt{6}/2, 0, 0\right) + k_1\left(-1/2, 1/2, 1\right)\ ;\ k_1 \in \mathbb{R}$

$L_2: (x, y, z) = \left(-\sqrt{6}/_2, 0, 0\right) + k_2\left(1/_2, 1/_2, 1\right); k_2 \in \mathbb{R}$

$L_3: (x, y, z) = \left(-\sqrt{6}/_2, 0, 0\right) + k_3\left(1/_2, -1/_2, 1\right); k_3 \in \mathbb{R}$

$L_4: (x, y, z) = \left(\sqrt{6}/_2, 0, 0\right) + k_4\left(-1/_2, -1/_2, 1\right); k_4 \in \mathbb{R}$

III.b. *Posición relativa de estas 4 rectas entre sí, tomadas de a pares*:

L_1 y L_2: secantes; *L_1 y L_3*: alabeadas; *L_1 y L_4*: secantes; *L_2 y L_3*: secantes; *L_2 y L_4*: alabeadas; *L_3 y L_4*: secantes.

III.c. *Ángulo que forman dichas rectas, tomadas de a pares*:

Angulo entre:

L_1 y L_2: $\varphi_{12} = \arccos(2/_3) = 48^o\ 11`\ 23``\ (0{,}841\ rad)$

L_1 y L_3: $\varphi_{13} = \arccos(1/_3) = 70^o\ 31`\ 43{,}61``\ (1{,}23\ rad)$

L_1 y L_4: $\varphi_{14} = \arccos(2/_3) = 48^o\ 11`\ 23``\ (0{,}841\ rad)$

L_2 y L_3: $\varphi_{23} = \arccos(2/_3) = 48^o\ 11`\ 23``\ (0{,}841\ rad)$

L_2 y L_4: $\varphi_{24} = \arccos(1/_3) = 70^o\ 31`\ 43{,}61``(1{,}23\ rad)$

L_3 y L_4: $\varphi_{34} = \arccos(2/_3) = 48^o\ 11`\ 23``\ (0{,}841\ rad)$

III.d. i) *Distancia entre las mismas, tomadas de a pares*:

L_1 y L_2: $d_{12} = 0$ (punto de intersección: B)
L_1 y L_3: $d_{13} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$ m
L_1 y L_4: $d_{14} = 0$ (punto de intersección: A)
L_2 y L_3: $d_{23} = 0$ (punto de intersección: C)
L_2 y L_4: $d_{24} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$ m
L_3 y L_4: $d_{34} = 0$ (punto de intersección: D)

ii) *Puntos de medición de la mínima distancia entre*:

Entre las rectas L_1 y L_3:

Vector normal a ambas rectas: $\boldsymbol{n_{13}} = (1,1,0)$

Plano que contiene a L_1 *y es paralelo a* $\boldsymbol{n_{13}}$: $\pi: -x + y - z + \sqrt{6}/_2 = 0$
Punto desde donde se mide la distancia en L_3: (Intersección entre π y L_3):

$en\ L_3 : P_3\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

$en\ L_1 : P_1\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

Observación: $\|\boldsymbol{P_1P_3}\| = d_{13} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$ m

Entre las rectas L_2 y L_4:

Vector normal a ambas rectas: $\boldsymbol{n_{24}} = (1, -1, 0)$

Plano que contiene a L_2 *y es paralelo a* $\boldsymbol{n_{24}}$: $\quad \pi`: x + y - z + \sqrt{6}/2 = 0$

Punto desde donde se mide la distancia en L_3: (Intersección entre π` y L_4):

$en\ L_4:\ P_4(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2})$

$en\ L_2:\ P_2(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2})$

Observación: $\|\boldsymbol{P_2P_4}\| = d_{24} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$ m

III.e. *Intersecciones*:

i) Rectas L_1 y L_3 con el plano $z = \sqrt{6}/2$

En L_1: $M(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ En L_3: $P(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2})$

Observación: se trata de los puntos P_1 y P_3

ii) Rectas L_1 y L_3 con el plano $z = \sqrt{6}/4$

En L_1: $K(\frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{4})$ En L_3: $R(-\frac{3\sqrt{6}}{8}, -\frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{4})$

iii) Rectas L_1 y L_3 con el plano $z = 3\sqrt{6}/4$

En L_1: $N(\frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{3\sqrt{6}}{4})$ En L_3: $Q(-\frac{\sqrt{6}}{8}, -\frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{3\sqrt{6}}{4})$

III.f. Distancias entre los puntos N y R, entre M y P y entre K y Q.

$\|\boldsymbol{MP}\| = \sqrt{3} \cong 1{,}73$ m

$\|\boldsymbol{NR}\| = \sqrt{18}/2 \cong 2{,}12$ m

$\|\boldsymbol{KQ}\| = \sqrt{18}/2 \cong 2{,}12$ m

III.g. *Ecuaciones de las rectas L_5, L_6, L_7*:

L_5 : recta que pasa por los puntos N y R

$L_5: (x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{3\sqrt{6}}{4}\right) + k_5\,(1, 1, 1)\ ;\ k_5 \in \mathbb{R}$

L_6 : recta que pasa por los puntos M y P

$L_6: (x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + k_6(1, 1, 0)\ ;\ k_6 \in \mathbb{R}$

L_7 : recta que pasa por los puntos K y Q

$L_7: (x, y, z) = \left(\frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right) + k_7\,(1, 1, -1)\ ;\ k_7 \in \mathbb{R}$

Parte IV: Secciones cónicas

IV.a. *Ecuaciones de las parábolas*:

En el plano *xz*: $\begin{cases} -\frac{\sqrt{6}}{2}\left(z-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$

En el plano *yz*: $\begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{2}\left(z-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$

IV.b. Recta L_8 : $(x, y, z) = (5{,}0\,,7) + k_8\,(4\,,0,-1)\;;\; k_8 \in \mathbb{R}$

Punto T de la parábola en el que la recta tangente tiene igual pendiente que la recta L_8 T$\left(\frac{\sqrt{6}}{16}, 0\,, \frac{63\sqrt{6}}{128}\right)$. Distancia de T a la recta L_8: d= 6.8 m. Luego, la mínima distancia entre la recta L_8 y la parábola que pasa por los puntos A y C es d= 6.8 m.

Parte V: Superficies cuádricas

V.a. *Ecuación de la superficie cuádrica que contiene a la cubierta en estudio*:

$-\frac{x^2}{\sqrt{6}/_2} + \frac{y^2}{\sqrt{6}/_2} = \left(z-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ Paraboloide hiperbólico

V.b. *Intersección de la superficie con el plano* z = $\sqrt{6}/2$

L_9: $(x, y, z) = \left(0\,,0\,,\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + k_9(1\,,1,0)\;;\; k_9 \in \mathbb{R}$

L_{10}: $(x, y, z) = \left(0\,,0\,,\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + k_{10}(1\,,-1,0)\;;\; k_{10} \in \mathbb{R}$

V.c. Las rectas L_5, L_6 y L_7 del problema III.e pertenecen a la superficie cuádrica.

L_6 pertenece a la superficie ya que el punto M de L_6 es también punto de L_9

$M\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \in L_9$ y $\boldsymbol{dl_6} = \boldsymbol{dl_9}$

L_5 pertenece a la superficie ya que para todo valor de $k_5 \in \mathbb{R}$ los puntos de L_5 cumplen la ecuación de la superficie: $\frac{\sqrt{6}}{2}k_5+\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}k_5+\frac{3}{4}$

L_7 pertenece a la superficie ya que para todo valor de $k_7 \in \mathbb{R}$ los puntos de L_7 cumplen la ecuación de la superficie: $-\frac{\sqrt{6}}{2}k_7-\frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{6}}{2}k_7-\frac{3}{4}$

Parte VI: Coordenadas esféricas

VI.a. *Ecuación del paraboloide hiperbólico en coordenadas esféricas*:

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\, (1 - 2cos^2\theta) - \rho \frac{\sqrt{6}}{2} cos\varphi + 3/2 = 0$$

También:

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\, (sen^2\theta - cos^2\theta) - \rho \frac{\sqrt{6}}{2} cos\varphi + 3/2 = 0$$

VI.b. Coordenadas de los puntos A, B, C y D:

Punto	ρ	φ	Θ
Punto A	$\sqrt{6}/_2$	$\pi/_2$	0
Punto B	$\sqrt{30}/_2$	$\pi/_2 - \arctan(2) \cong 0{,}46365$	$\pi/_2$
Punto A	$\sqrt{6}/_2$	$\pi/_2$	π
Punto B	$\sqrt{30}/_2$	$\pi/_2 - \arctan(2) \cong 0{,}46365$	$3\pi/_2$

VI.c. Coordenadas de los puntos:

Punto	ρ	φ	Θ
S_1	1,12	$\pi/_6$	0
S_2	1,07	$\pi/_4$	0
S_3	1.88	$2\pi/_3$	0
S_4	1,732	$\pi/_4$	$\pi/_4$
S_5	1,268	$\pi/_4$	$\pi/_6$
Punto M	3/2	$\pi/_2 - \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right) \cong 0{,}6155$	$\pi/_4$

5. PROBLEMA DE ARTICULACIÓN

5.1. OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD DE ARTICULACIÓN

Se plantea la resolución de un problema de aplicación de interés que permite articular actividades entre las asignaturas *Geometría Analítica* y *Estabilidad* II de la carrera de Ingeniería Civil. Esta actividad de articulación puede extenderse a otros espacios curriculares, tales como Estática y Resistencia de Materiales de las carreras de Ingeniería Industrial, de Petróleos y en Mecatrónica.

A partir de estas actividades de articulación se busca:

- Potenciar los procesos comprensivos y reflexivos de contenidos específicos de *Geometría Analítica* y otros espacios curriculares, a partir de la resolución de problemas de articulación de interés para el estudiante de acuerdo a la carrera por él elegida.
- Promover en el estudiante el desarrollo del interés por el conocimiento y el dominio de los instrumentos analíticos y de visualización geométrica práctica, propios de un ingeniero.
- Brindar herramientas geométricas adecuadas para su utilización en las etapas iniciales del proceso de diseño y/o verificación de una estructura simple de la Ingeniería.

5.2. PLANTEO DEL PROBLEMA A RESOLVER

5.2.1 Fundamentos.

En el ámbito de la ingeniería en general y de la Ingeniería Civil en particular, en muchas ocasiones se plantea la necesidad de realizar un *relevamiento* de una estructura determinada con diversos fines. Se entiende por relevamiento, la recolección *in-situ* de una serie de datos específicos de una estructura existente. Dichos datos son de diversa índole, tales como *dimensiones geométricas*, características de los materiales, estado de conservación de los elementos constituyentes, información del entorno de la estructura, entre otros.

Existen situaciones en las cuales, ya sea por la importancia de la estructura, la falta de disponibilidad de instrumentos de medición adecuados, o por falta de mano de obra necesaria para la realización del relevamiento completo y exhaustivo, es suficiente la realización de un *relevamiento aproximado* y *expeditivo* del problema.

5.2.2. Presentación del problema y ejemplo resuelto.

Se presenta la necesidad de relevar en forma aproximada las dimensiones de un letrero de señalización vial vertical, ubicado en una Ruta Nacional de la República Argentina.

El relevamiento es aproximado y consiste en un registro fotográfico del letrero y la medición de una longitud característica del mismo, que en el presente caso la constituye la altura de una marca determinada sobre la columna del letrero, ubicada a 1m de altura sobre el nivel del terreno. A partir de dichos datos y de la fotografía obtenida es posible determinar dimensiones y coordenadas de puntos específicos para ser utilizados en cálculos futuros.

5.2.3. Resolución del problema.

Se presenta el caso de relevamiento a partir de una *fotografía* del letrero en estudio, el cual se indica en este caso a partir de la Figura 5.1 a los efectos de lograr mayor claridad en el procedimiento a utilizar.

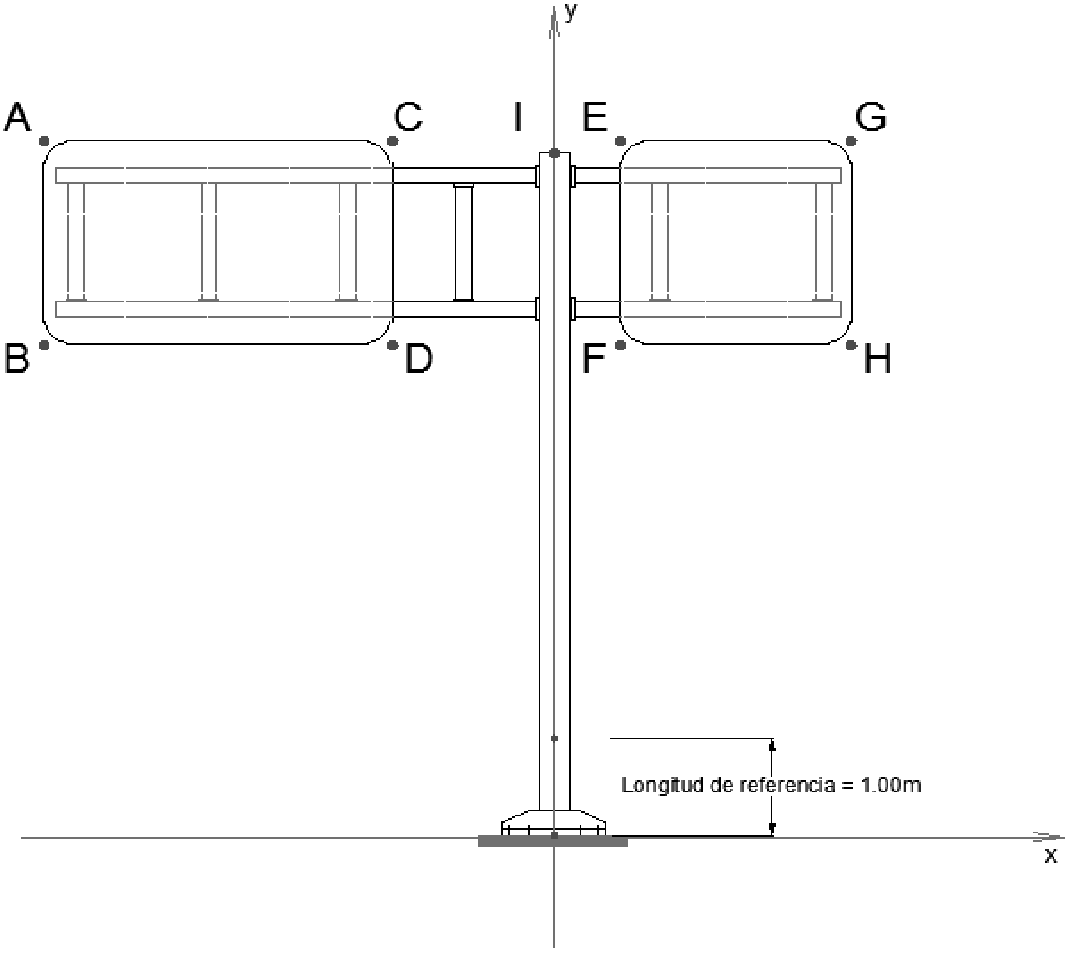
La resolución del problema planteado implica el seguimiento de los siguientes pasos:

1) En primer lugar, se selecciona un *sistema de referencia* con origen en un punto característico de la estructura a relevar. En este caso se selecciona el origen de coordenadas en la base del letrero y el eje y-y coincidente con la columna de sostén del mismo.

2) Determinación de la *escala geométrica* no normalizada de la fotografía.

$$\boxed{Escala = \beta = \frac{Longitud\ medida}{Longitud\ real}}$$

En el presente caso: $\beta = \frac{1.6cm}{100cm} = 0.016$



Letrero señalización vial tipo Bandera doble bi-dintel

Figura 5.1. Representación gráfica del letrero en estudio.

3) Se determinan por medición directa sobre la fotografía, las coordenadas de cada uno de los puntos especiales de la estructura relevada. Es conveniente ordenar los datos en una planilla de cálculos tal como la indicada en la Figura 6.2.

Relevamiento geométrico de un letrero de señalización vial
Letrero tipo bandera doble

Pto. Característico	Longitud medida Eje x-x cm	Longitud medida Eje y-y cm	Escala β	Coordenadas Eje x-x cm	Coordenadas Eje y-y cm
A	-8,00	11,50	0,016	-500,00	718,75
B	-8,00	8,00	0,016	-500,00	500,00
C	-2,60	11,50	0,016	-162,50	718,75
D	-2,60	8,00	0,016	-162,50	500,00
E	1,20	11,50	0,016	75,00	718,75
F	1,20	8,00	0,016	75,00	500,00
G	4,70	11,50	0,016	293,75	718,75
H	4,70	8,00	0,016	293,75	500,00
I	0,00	11,20	0,016	0,00	700,00

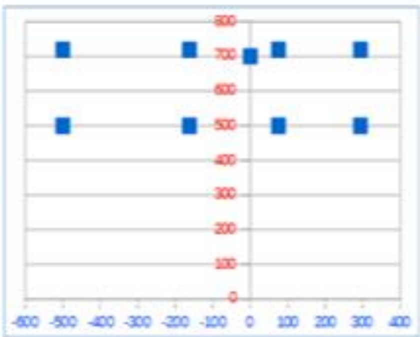


Figura 5.2. Representación gráfica del letrero en estudio.

Las coordenadas finales reales de los puntos se determinan dividiendo la longitud medida sobre la fotografía por el coeficiente de escala obtenido, tal como puede observarse en el ejemplo de la tabla presentada. Cabe señalar que también suele adoptarse un factor de escala tal que al multiplicarlo por el valor medido permite obtener la magnitud real.

4) Una vez obtenidos los valores de las coordenadas de los puntos característicos del letrero, es posible transformar el problema a su forma vectorial y calcular aquellas magnitudes que resulten necesarias para la estructura relevada.
Por ejemplo para obtener el área del letrero izquierdo es posible realizar los siguientes cálculos:

$$Área1 = \|AB \wedge AC\| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -218.75 & 0 \\ 337.5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \|337.5(218.75k)\| = \|73828.75k\|$$

$$\boxed{Área1 = 73828.75cm^2 \cong 7.4m^2}$$

5.2.4. Tareas a realizar:

De acuerdo a la letra inicial del apellido, cada estudiante resolverá un problema determinado, calculando en primer lugar, las coordenadas de los puntos característicos del letrero de señalización 1 que le corresponda. A continuación, y teniendo en cuenta las coordenadas de los puntos RT1, RT2, RT3 obtenidos a partir de un relevamiento del terreno, se determinarán las coordenadas de los puntos característicos del letrero de señalización 2, de iguales características que el primero, indicado en el corte longitudinal. Finalmente, se hallarán las ecuaciones cartesianas paramétricas de las rectas que contienen las columnas de ambos letreros y se calculará la distancia entre ellas. En las Figura 5.3 a 5.10 se indican los ocho tipos de problemas a resolver.

Problema	Letra inicial del Apellido
AGAE1	A-B
AGAE2	C-D
AGAE3	E-F
AGAE4	G-H
AGAE5	I-M
AGAE6	N-P
AGAE7	Q-R
AGAE8	R-Z

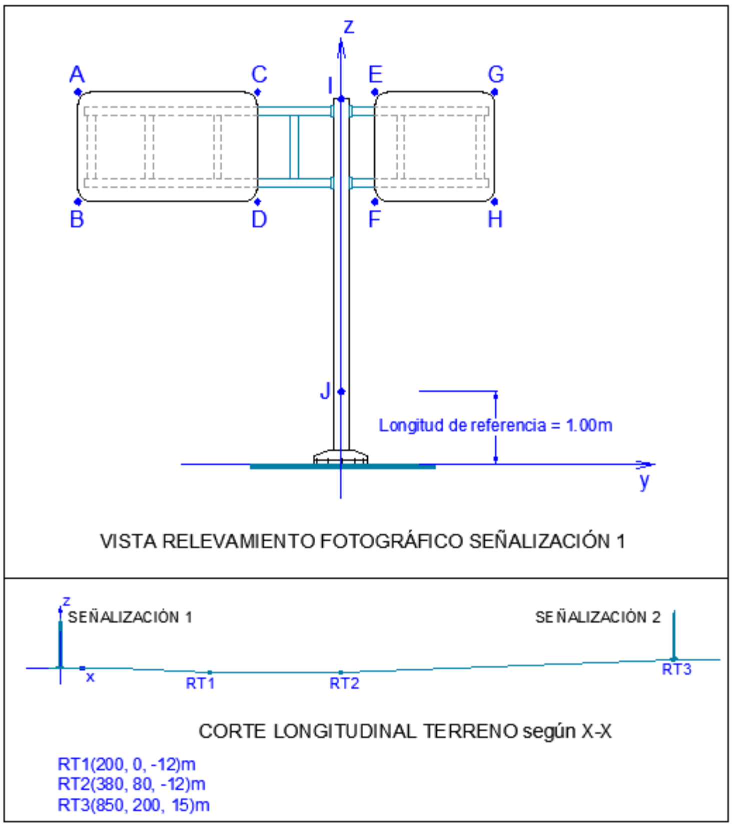


Figura 5.3. Problema AGAE1

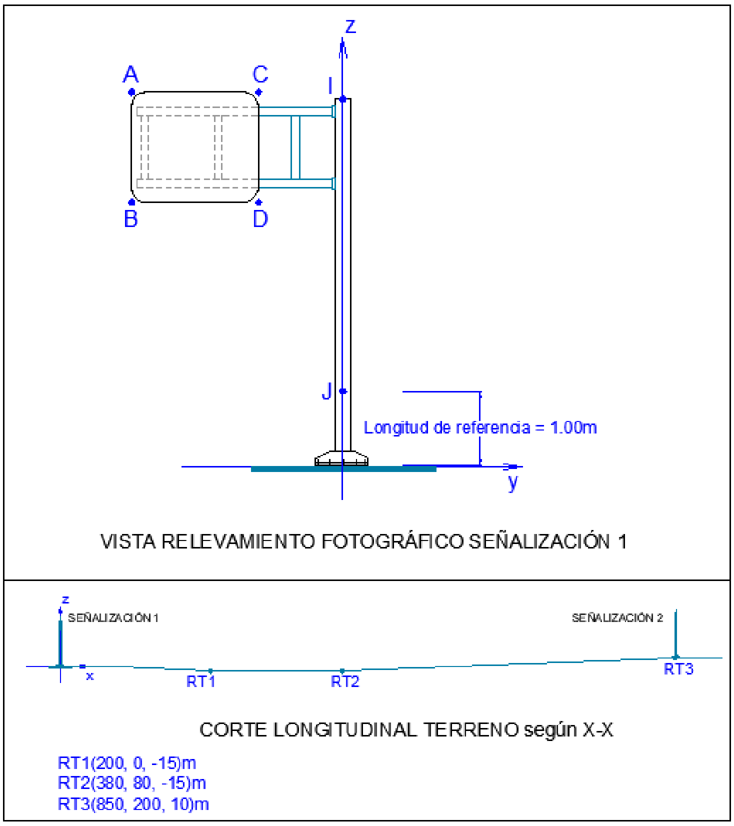


Figura 5.4. Problema AGAE2.

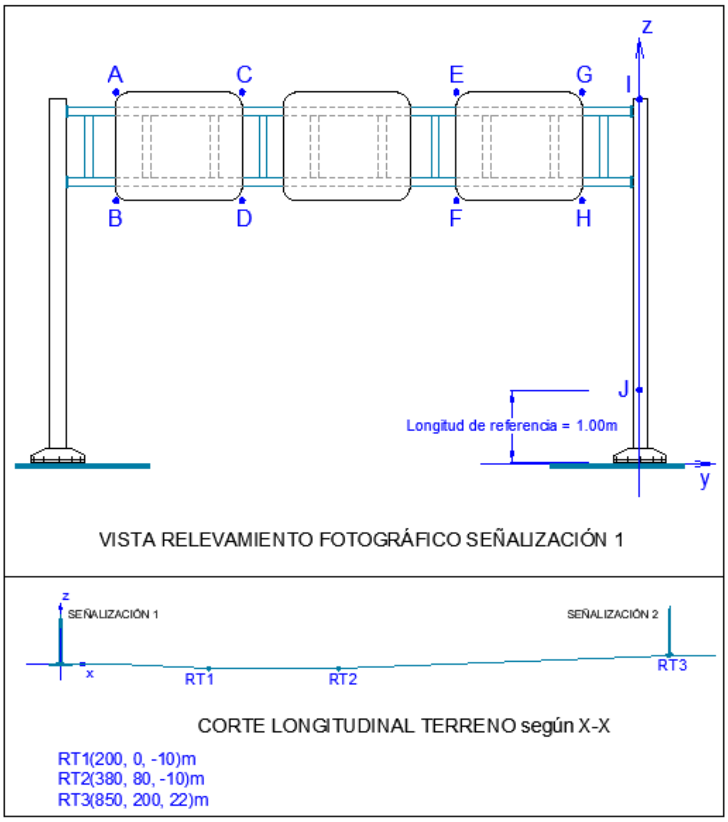


Figura 5.5. Problemas AGAE3.

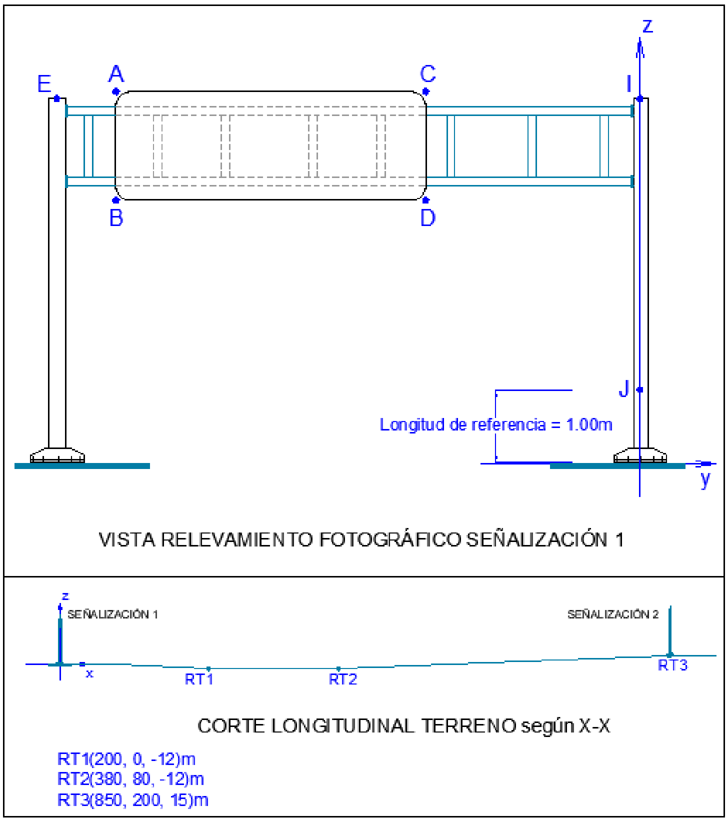


Figura 5.6. Problemas AGAE4.

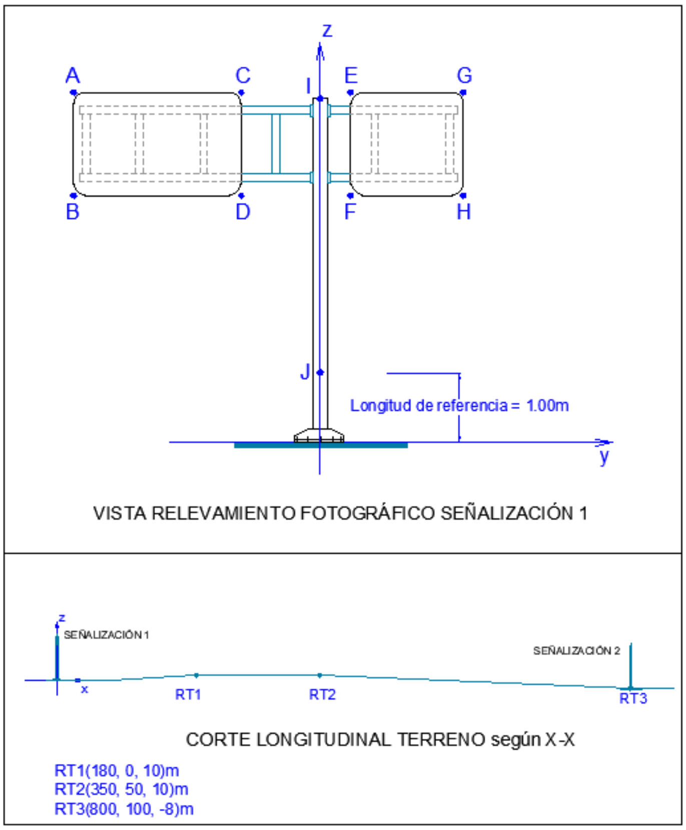


Figura 5.7. Problemas AGAE5

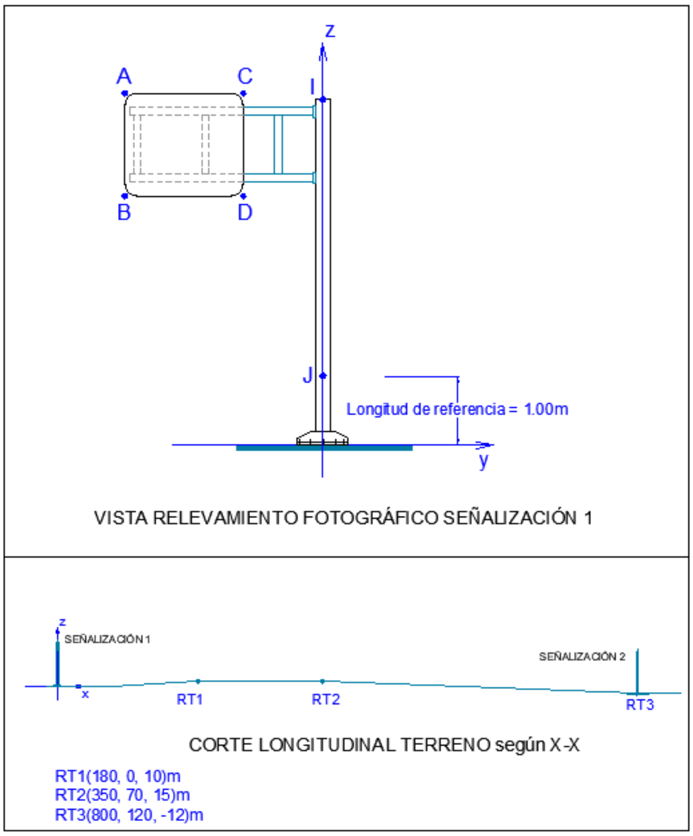


Figura 5.8. Problemas AGAE6.

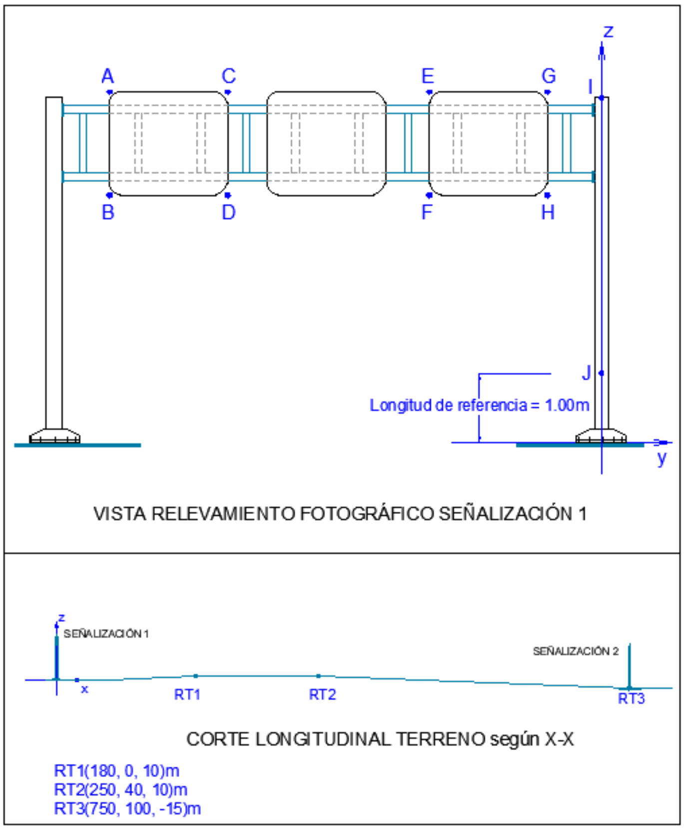


Figura 5.9. Problemas AGAE7.

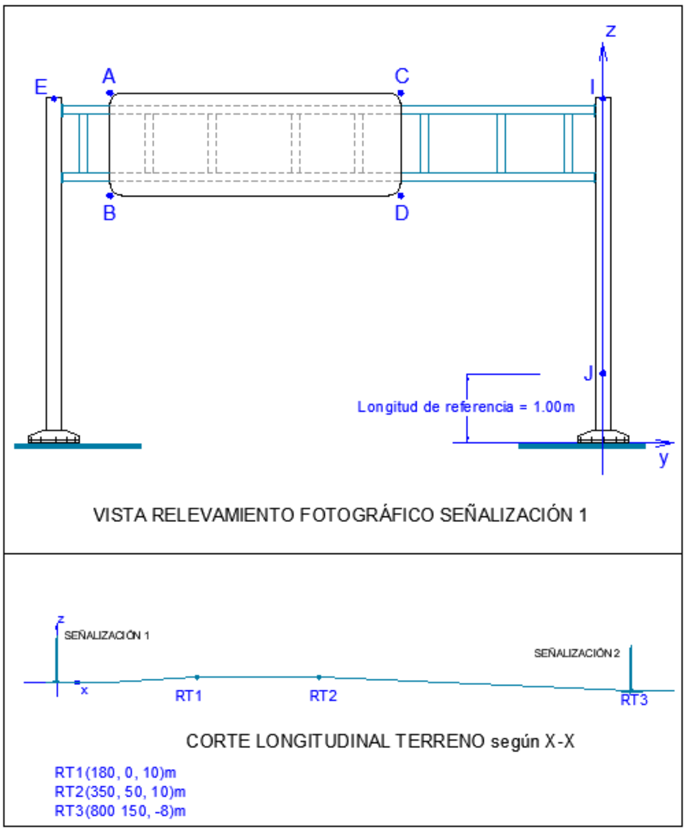


Figura 5.10. Problemas AGAE8.

ANEXO

1 Respuestas y/o resoluciones de las Actividades Complementarias

Al estudiante:

El siguiente anexo cuenta con respuestas y algunas resoluciones sintéticas de los ejercicios complementarios, para que puedas validar las tuyas.

Te sugerimos resolver cada ejercicio en forma completa, antes de leer las respuestas.

En tu carpeta de trabajo deben quedar todas las justificaciones y los desarrollos de cada ejercicio, aun cuando no estén aquí indicados.

3.1 ESPACIOS VECTORIALES

C1.

a) No es base de $\mathbb{R}^2$.
b) No es base de $\mathbb{R}^2$.
c) Es base de $\mathbb{R}^2$.
d) No es base de $\mathbb{R}^2$.

C2.

a) El vector $\boldsymbol{u} = (-12\,, 9)$, por lo tanto $(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{B}} = \left(-\frac{15}{8}, \frac{9}{2}\right)$.
c) Forman una base de $\mathbb{R}^2$.

C3.

Caso I: $(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{B}} = (-4, -3)$

Caso II: $(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{B}} = (-1, -1)$

C4.

a) $(\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{B}} = (-3{,}2)$

b) $\boldsymbol{u} = (-2.5, -5.5)$

3.2 VECTORES GEOMÉTRICOS PRODUCTO ESCALAR

C5.

a) Las coordenadas del vértice E son $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) La altura de la pirámide es $h = \frac{3\sqrt{2}}{2}[L]$.

c) El ángulo entre las aristas BE y CE mide 60°.

C6.

$\overrightarrow{\boldsymbol{proy_v w}} = (1,1)$

C7.

a) $(\boldsymbol{v})_{B_1} = \left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$

c) Los vectores $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$ son ortogonales. Al normalizarlos se obtiene una BON de $\mathbb{R}^2$ dada por: $B_2 = \left\{\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}$

C8.

a) Los tres vectores son ortogonales entre sí y tienen norma uno, por lo tanto, es BON de $\mathbb{R}^3$

b) $(\boldsymbol{v})_B = \left(0, 4\sqrt{2}, 8\right)$

c) Son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ LI, entonces generan a $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto forman una base de $\mathbb{R}^3$.

d) $Proy_{\boldsymbol{c}}\, \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{c}}{||\boldsymbol{c}||} = \left(0, 4\sqrt{2}, 8\right).(0,0,1) = 8$

3.3 PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO

C9.

a) Ver Capítulo 1 de *Geometría Analítica para Ciencias e Ingeniería,* [*Raichman y Totter, 2016*].

b) El volumen del tetraedro es $2m^3$.

c) El ángulo entre $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$ es aproximadamente 63°**.**

C10.

a) $A = 18m^2$
b) $V = 162m^3$
c) Los vectores $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$ son LI ya que su producto mixto es distinto de cero.

3.4 PLANOS Y RECTAS

C11.

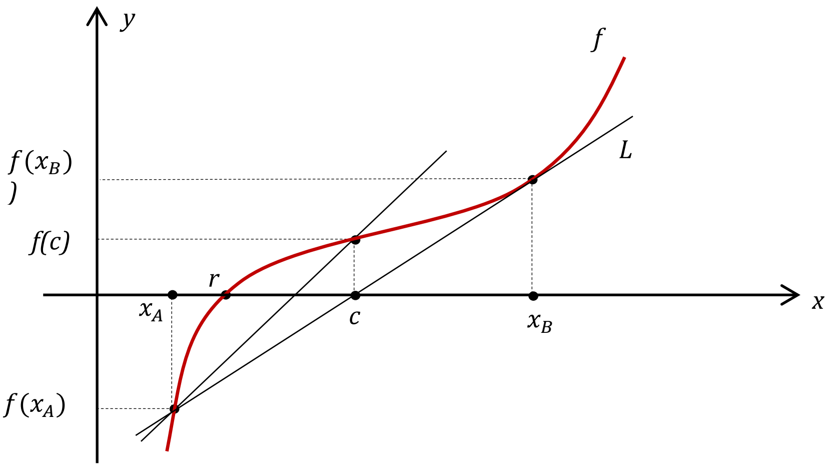
d) Ver Capítulo 2 de *Geometría Analítica para Ciencias e Ingeniería,* [*Raichman y Totter, 2016*].
e) La distancia del origen al plano dado es $\frac{9}{\sqrt{22}}[L]$.
f) Existen dos planos que distan a 4 unidades del plano π, cuyas ecuaciones generales son: $\pi_1: -x + 2y + 2z - 9 = 0$ $\quad \pi_2: -x + 2y + 2z + 15 = 0$

C12.

a) La ecuación de la familia reducida de planos que pasa por la intersección de $\pi_1 y\, \pi_2$ es: $3x - 2z + 4 + \lambda(y + z + 3) = 0 \quad \lambda \epsilon \mathbb{R}$
b) $\pi_3: 3x + y - z + 7 = 0$
c) El plano π_1 es paralelo al eje y; el plano π_2 es perpendicular al plano yz.

C13.

Se realiza una interpretación geométrica con los datos del enunciado:



a) La recta L une los puntos $(x_A, f(x_A))$ y $(x_B, f(x_B))$, por lo tanto su pendiente es: $m = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}$ y la ecuación de la recta puede escribirse como:

$$L: g(x) = \left[\frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}\right](x - x_A) + f(x_A)$$

b) La recta L intersecta al eje de las abscisas x cuando $g(c) = 0$. Por lo tanto, se determina la abscisa del punto $(c, 0)$, a partir de la ecuación de la recta L:

$$0 = \left[\frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}\right](c - x_A) + f(x_A)$$

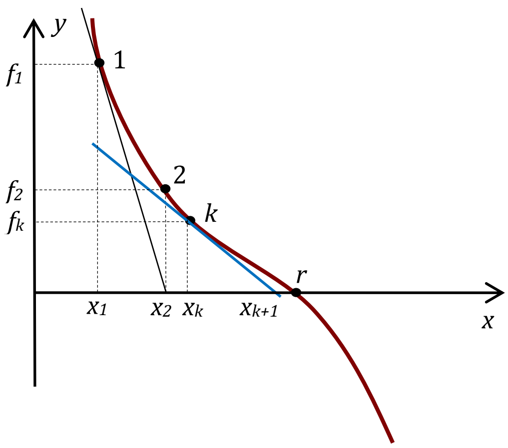
$$c = \frac{f(x_B)x_A - f(x_A)x_B}{f(x_B) - f(x_A)}$$

c) Si $f(c)$ tiene distinto signo que $f(x_A)$, se repite el procedimiento indicado en los incisos anteriores para el intervalo $[x_A, c]$.

Si $f(c)$ tiene distinto signo que $f(x_B)$, se repite el procedimiento indicado en los incisos anteriores para el intervalo $[c, x_B\ ]$.

C14.

Se realiza una interpretación geométrica con los datos del enunciado:



a) Analíticamente la recta L pasa por el punto $[x_k, f(x_k)]$, y su pendiente se puede calcular como$f'(x_k)$. Por lo tanto, la ecuación de la recta L resulta:

L: $g(x) - f(x_k) = f'(x_k)\ (x - x_k)$

b) La recta L intersecta al eje de abscisas x cuando $g(x_{k+1}) = 0$. Se determina la abscisa del punto $(x_{k+1}, 0)$ a partir de la ecuación de la recta L:

$0 - f(x_k) = f'(x_k)\ (x_{k+1} - x_k)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

d) Se repite el procedimiento anterior con la recta que pasa por el punto $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$.

C15.

a) La ecuación vectorial paramétrica de L_2: $(x, y, z) = (0,1,0) + t(-1,3,-1)\quad t\epsilon\ \mathbb{R}$.

Las ecuaciones simétricas de $L_2: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$. Los números directores son: $u_x = -1, u_2 = 3\ y\ u_3 = -1$.

b) $L_1\ y\ L_2$ son alabeadas.

c) Existen dos planos paralelos a $L_1\ y\ L_2$ que disten $\sqrt{32}$ del punto Q, cuyas ecuaciones generales son: $\pi_1 : x - z + 7 = 0$; $\pi_2 : x - z - 9 = 0$.

d) La proyección de R en el plano xy es R'$(-12\ ;\ 120\ ;\ 0)$.

C16.

a) La distancia entre $L_1 y\ L_2$ es $d = 12\ [L]$.

b) $R(12{,}0{,}0)$

c) Hay dos planos perpendiculares a L_1 que distan a $\sqrt{2}$ de Q, cuyas ecuaciones son: $\pi_1 = -2y + 2z + 4 = 0$ y $\pi_2 = -2y + 2z - 4 = 0$.

C17.

a) Se tiene $L_1: (x, y, z) = (1.5{,}0{,}0) + \beta(0, -5{,}3)\ \ con\ \beta \in \mathbb{R}$ y $\pi_1: 5x + 20 = 0$, son paralelos no coincidentes.

C18.

a) $\boldsymbol{d_{L1}} \neq k\boldsymbol{d_{L2}}$por lo tanto no son paralelas, luego $(\boldsymbol{d_{L1}} \wedge \boldsymbol{d_{L2}}).\boldsymbol{P_1P_2} = 75$ entonces las rectas son alabeadas.

C19.

a) Se obtienen dos vectores paralelos al plano π_1, $\boldsymbol{EF} = (-6{,}0{,}0)$ y $\boldsymbol{HF} = (-3, -6, -12)$, luego $\boldsymbol{n_{\pi 1}} = (\boldsymbol{EF} \wedge \boldsymbol{HF}) = (0, -72{,}36)$. Se concluye que la ecuación del plano es $\pi_1: -72y + 36z + 432 = 0$. El plano π_1 y el eje z son secantes.

b) Se tienen las rectas $L_1: (x, y, z) = (6, -6{,}0) + \alpha(3, -6. -12) con\ \alpha \in R$ y $L_2: (x, y, z) = (6{,}0{,}0) + \beta(0{,}0{,}1)\ con\ \beta \in \mathbb{R}$.

Como $\boldsymbol{d_{L1}} \neq k\boldsymbol{d_{L2}}$ no son paralelas, luego $(\boldsymbol{d_{L1}} \wedge \boldsymbol{d_{L2}}).\boldsymbol{P_1P_2} = -18$ entonces las rectas son alabeadas.

La distancia entre las rectas $L_1 y\ L_2$ es $d \approx 2.7[L]$.

c)El ángulo comprendido entre el panel y la recta L_1: $\beta \approx 64°$ o $\alpha \approx 26°$.

3.5 CIRCUNFERENCIAS

C20.

a) Familia de circunferencias que pasan por la intersección de $C_1\ y\ C_2$:

$$x^2 + y^2 - 8x + 8y + 7 + \mu(x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23) = 0\ con\ \mu \in \mathbb{R}$$

b) $C_3: x^2 + y^2 + \frac{16}{3}x - 33 = 0$

c) La ecuación del eje radical es $-5x + 3y + 15 = 0$. La longitud de la cuerda común a las circunferencias es $\|\boldsymbol{P_1P_2}\| \approx 8.16[L]$.

d) La recta que pasa por los centros de las circunferencias C_1 y C_2, está dada por: $y = -\frac{3}{5}x - \frac{8}{5}$, Es una recta perpendicular al eje radical ya que sus pendientes son inversas y opuestas.

C21.

La ecuación de la circunferencia que tiene centro en $C(h,k)$ y radio r es

$\mathcal{C}$: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y el vector $\boldsymbol{CT} = (x_T - h, y_T - k)$.

Como se debe probar que $\boldsymbol{CT}$ es perpendicular a la recta tangente, se determina el vector director de la misma, $\boldsymbol{d_L}$, derivando implícitamente $\mathcal{C}$, $y' = -\frac{x-h}{y-k}$ evaluada en el punto $T(x_T, y_T)$ se tiene $y'_T = \frac{h+x_T}{y_T-k}$.

Por lo tanto $\boldsymbol{d_L} = (y_T - k, h + x_T)$.

Para demostrar que $\boldsymbol{d_L}$ es perpendicular a $\boldsymbol{CT}$, se calcula el producto escalar:

$\boldsymbol{d_L}.\boldsymbol{CT} = (y_T - k, h + x_T).(x_T - h, y_T - k) \quad = \quad y_T x_T - h x_T - k x_T + kh + h y_T - kh - y_T x_T + k x_T$

$\boldsymbol{d_L}.\boldsymbol{CT} = 0$

Queda demostrado que la recta tangente a la circunferencia de centro en $C(h,k)$ y radio r , es perpendicular al segmento que une el centro con el punto de tangencia.

C22.

La ecuación de la circunferencia es: $(x-2)^2 + (x+4)^2 = 18$.

C23.

La ecuación general de la circunferencia es $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$ al completar cuadrados, se obtiene la ecuación cartesiana:

$(x+4)^2 + (y-5)^2 = 3^2$ luego $C(-4,5)$ y $r = 3$.

La familia de rectas (no verticales) que pasan por el punto $Q(-7,-3)$ resulta: $y + 3 = m(x+7)$ con $m \in \mathbb{R}$, cuya ecuación general es

$mx - y + 7m - 3 = 0$ con $m \in \mathbb{R}$.

La distancia del centro de la circunferencia, $C(-4,5)$, a la recta tangente es igual al radio, por lo tanto:

$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$3 = \frac{|m(-4) - 1(5) + 7m - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$

Al resolver la ecuación, se obtiene $m = \frac{55}{48}$ por lo tanto $L_1 \colon y = \frac{55}{48}x + 5$.

La única recta que pertenece a la familia, que es tangente a la circunferencia y que además pasa por Q es L_1.

Ahora se verifica si la recta vertical que pasa por Q , es decir $x = -7$ es tangente a la circunferencia, obteniendo si existe la intersección entre ambos lugares geométricos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0 \\ x = -7 \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtiene una única solución que es el punto $T(-7{,}5)$. Por lo tanto, las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por el punto Q son:

$L_1: y = \frac{55}{48}x + 5$ y $L_2: x = -7$.

3.6 PARÁBOLAS

C24.

a) $x^2 = 12y$

Eje focal: eje y — $p = 6$

Vértice: $V(0{,}0)$ — Foco: $F(0;3)$

Directriz: $D: y = -3$ — Lado Recto: $|LR| = 12$

Puntos extremos del lado recto:
$A(-6;3)$ y $A'(6;3)$

b) $y^2 = 16x$

Eje focal: eje x — $p = 8$

Vértice: $V(0{,}0)$ — Foco: $F(4;0)$

Directriz: $D: x = -4$ — Lado Recto: $|LR| = 16$

Puntos extremos del lado recto:
$A(4;8)$ y $A'(4;-8)$

c) $(x-3)^2 = -8(y-4)$

Eje focal:
paralelo al eje y
$p = -4$
Vértice: $V(3{,}4)$ Foco: $F(3;2)$
Directriz: Lado Recto:
$D: y = 6$ $|LR| = 8$

Extremos del lado recto:
$A(7;2)$ y $A'(7;-2)$

d) $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$

Eje focal:
paralelo al eje x
$p = -2$
Vértice: Foco: $F(-3;-1)$
$V(-2,-1)$
Directriz: Lado Recto:
$D: x = -1$ $|LR| = 4$

Puntos extremos del lado recto:
$A(-3,1)$ y $A'(-3,-3)$

C25.

La condición impuesta coincide con la definición de parábola, la ecuación que responde a los datos es: $(x-1)^2 = 4(y-5)$.

C26.

Considerando un sistema de referencia dónde el eje x coincide con el nivel de suelo y el eje y con el eje focal de la parábola la forma de la ecuación que describe la sección transversal de la cubierta parabólica es:

$x^2 = 2p(y-k)$; con $V(0,k)$.

Se conoce que $|LR| = |2p| = 100$, por lo tanto, se obtiene que $p = -50$.

En el sistema de referencia elegido, la parábola pasa por los puntos $B(-35{,}0)$ y $C(35{,}0)$. Luego $35^2 = -100(0-k)$ y se obtiene $k = 12{,}25$.

La ecuación de la parábola que describe la sección transversal de la cubierta resulta:

$x^2 = -100(y - 12{,}25)$ para $y \geq 0$

a) La altura máxima que alcanzará el arco es $12{,}25m$ desde el nivel del suelo.

b) Si se necesita colocar una estructura de $6m$ de altura, se determina la distancia a los extremos sustituyendo $y = 6$ en la ecuación obtenida en a):

$x^2 = -100(6 - 12{,}25)$

Luego $x = 25$ o $x = -25$. Por lo tanto, se dispone de una altura de 6m a una distancia de 10m de los extremos.

c) Las ecuaciones paramétricas que permitan describir el arco son:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{-100} + 12{,}25 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Para $t = 10$, se obtiene $y = 11{,}25$. Es decir que la altura de un punto situado a la $10m$ del centro es $11{,}25m$.

C27.

La familia de parábolas de eje focal coincidente con el eje y, cuyo vértice es el punto V(0,4) es:

$x^2 = 2\,t\,(y - 4) \qquad t \in \mathbb{R}.$

C28.

a) Se trabaja con el eje x en coincidencia con el nivel de los apoyos y con el eje y en coincidencia con los puntos de mayor altura las parábolas (vértices). Siendo el eje y el eje focal de ambas parábolas.

La ecuación de la parábola correspondiente al arco superior es:

$x^2 = -31{,}16(y - 65)$ con $0 \le y \le 65.$

La ecuación de la parábola correspondiente al arco inferior es:

$x^2 = -40{,}50(y - 50)$ con $0 \le y \le 50.$

b) Se determinan las coordenadas de los puntos pertenecientes a las parábolas cuyas abscisas son $x = -15m$ y $x = -30m$ (sabiendo que los montantes se encuentran distanciados $15m$ en horizontal):

Obtenemos: $P_3(-15; 57{,}58)$, $P_4(-15; 44{,}44)$, $P_5(-30; 36{,}12)$ y $P_6(-30; 27{,}78)$

Las longitudes de los montantes se determinan como: $\|\boldsymbol{P_3P_4}\| = 13{,}34m$ $\|\boldsymbol{P_5P_6}\| = 8{,}34m$ y la longitud de la diagonal 4-5 es: $\|\boldsymbol{P_4P_5}\| = 17{,}15m$.

3.7 ELIPSES E HIPÉRBOLAS

C29.

Siendo $C(1,1)$ y unos de sus vértices $V(1,6)$, existe dos opciones:

i) Elipse con eje focal paralelo al eje y: $\frac{(y-1)^2}{5^2} + \frac{(x-1)^2}{4^2} = 1$

ii) Elipse con eje focal paralelo al eje x: $\frac{(x-1)^2}{6{,}25^2} + \frac{(y-1)^2}{5^2} = 1$

C30.

a) Se elige el origen del sistema de coordenadas en el centro del arco semielíptico, con el eje y en coincidencia con el eje de simetría y el eje x en coincidencia con el nivel del suelo.

Luego $a = \frac{22m}{2} = 11\,m$ y por lo tanto $b = 8\,m$. Por lo tanto, la ecuación del arco semielíptico es:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{11^2} + \dfrac{y^2}{8^2} = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) La altura en correspondencia con los focos es el valor de la ordenada para la abscisa $x = c$. Por lo tanto, se calcula c de la siguiente manera:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{11^2 - 8^2} = \sqrt{57}m \cong 7{,}55\,m$$

Al reemplazar $x = 7{,}55$ en la ecuación del arco se obtiene la altura en correspondencia con los focos:

$$y = 8\sqrt{1 - \frac{x^2}{11^2}} = 8\sqrt{1 - \frac{57}{11^2}} = \frac{64}{11}\,m \cong 5{,}82\,m$$

c) Se deriva implícitamente para encontrar la pendiente de la recta tangente:

$$\frac{2x}{11^2} + \frac{2y\,y'}{8^2} = 0$$

$$y' = -\frac{8^2\,x}{11^2\,y}$$

Los extremos se corresponden con un valor de $11m$ para la variable x, por lo que a $2\,m$ del extremo, $x = 9$. Se calcula la ordenada del punto $(9, y)$:

$$y = 8\sqrt{1 - \frac{9^2}{11^2}} = \frac{16\sqrt{10}}{11} \cong 4{,}60\,m$$

Luego se calcula la pendiente de la recta tangente al sustituir $(9; 4{,}6)$ en la derivada primera:

$$y' = -\frac{8^2\,x}{11^2\,y} = -\frac{8^2\,9}{11^2\,4{,}60} = -1{,}035$$

Se concluye que la pendiente de la recta estando a $2m$ de uno de los extremos es aproximadamente $-1{,}035$.

C31.

Si un ingeniero se sitúa en uno de los focos, la cúpula estará aproximadamente a $2{,}29m$ de altura.

C32.

Se determina el centro de la elipse como el punto medio entre los dos focos:

$$\boldsymbol{OF_1} = (3,-2)$$

$$\boldsymbol{OF_2} = (3,6)$$

$$\boldsymbol{F_1C} = \frac{\boldsymbol{OF_2} - \boldsymbol{OF_1}}{2} = \frac{(3,6)-(3,-2)}{2} = (0,4)$$

$$\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OF_1} + \boldsymbol{F_1C} = (3,2)$$

$$c = \frac{\|\boldsymbol{F_1F_2}\|}{2} = \frac{\|\boldsymbol{OF_2} - \boldsymbol{OF_1}\|}{2} = 4$$

Luego $c = 4$ y permanece constante para cualquier elipse de la familia, por lo tanto, se pueden considerar como parámetros a o b.

Teniendo en cuenta que el eje focal es $x = 3$ (paralelo al eje y) y el centro C(3,2), si se toma como parámetro el valor del semieje menor b se tiene como ecuación de la familia de elipses:

$$\frac{(x-3)^2}{b^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2+4^2} = 1 \quad , \qquad b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Si se considera como parámetro el valor del semieje mayor a la ecuación de la familia es:

$$\frac{(x-3)^2}{a^2-4^2} + \frac{(y-2)^2}{a^2} = 1 \quad , \qquad a \in (-\infty,-4) \cup (4,\infty)$$

C33.

Recurso Geométrico Interactivo RGI – Tangentes a una elipse por un punto exterior, Capítulo 3 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica*.

C34.

Como datos se tienen $F_1(-4{,}5)$ y $F_2(2{,}5)$, a partir de ellos se determina c:

$$c = \frac{\|\boldsymbol{F_1F_2}\|}{2} = \frac{\|\boldsymbol{OF_2} - \boldsymbol{OF_1}\|}{2} = 3$$

Luego el centro es $C(-1,5)$, y la forma de la ecuación de la cónica es

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1$$

Se conoce un punto de la elipse $P_0(2{,}2)$, al ser su abscisa igual a la del foco, entonces P_0 es uno de los extremos del lado recto. Por lo tanto:

$$\frac{|LR|}{2} = \frac{b^2}{a} = \|\boldsymbol{F_2 P_0}\|$$

$$\frac{b^2}{a} = \|(0,-3)\| = 3$$

De ésta última relación y la relación de los semiejes $b^2 = a^2 - 3^3$, podemos determinar el valor de a:

$$3 = \frac{a^2 - 9}{a}$$

$$a^2 - 3a - 9 = 0$$

$$a = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \cong 4{,}854$$

Al conocer el valor del semieje mayor, se determina el valor del semieje menor de la elipse:

$$b = \sqrt{a^2 - 9} = 3\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \cong 3{,}816$$

Luego la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x+1)^2}{4{,}854^2} + \frac{(y-5)^2}{3{,}816^2} = 1$$

Para que resulten más sencillos los cálculos en el desarrollo de las ecuaciones de las rectas tangentes , se trabajará con la ecuación general de la elipse, dada por la expresión: $b^2x^2 + a^2y^2 + 2b^2x - 10a^2y + 25a^2 + b^2 - a^2b^2 = 0$, y al finalizar se sustituyen los valores de a y b.

Se calcula la derivada primera de la ecuación de la elipse para encontrar las pendientes de las rectas tangentes que pasan el punto exterior $Q(10,4)$:

$$y' = -\frac{b^2(x+1)}{a^2(y-5)}$$

Se define $T(x_T, y_T)$ como el punto de tangencia: Luego el vector $\boldsymbol{QT}$ dado por $\boldsymbol{QT} = (x_T - 10, y_T - 4)$, es un vector director de la recta tangente. Por lo tanto, se puede expresar la siguiente igualdad:

$$y' = -\frac{b^2(x_T+1)}{a^2(y_T-5)} = \frac{y_T - 4}{x_T - 10}$$

Al trabajar algebraicamente se obtiene la siguiente ecuación:

$$b^2x_T^2 + a^2y_T^2 - 9b^2x_T - 9a^2y_T + 20a^2 - 10b^2 = 0 \ \ [1]$$

Como $T(x_T, y_T)$ pertenece a la elipse satisface su ecuación, es decir:

$b^2x_T^2 + a^2y_T^2 + 2b^2x_T - 10a^2y_T + 25a^2 + b^2 - a^2b^2 = 0 \qquad [2]$

Se determina un sistema de ecuaciones con las ecuaciones [1] y [2]

$$\begin{cases} b^2x_T^2 + a^2y_T^2 + 2b^2x_T - 10a^2y_T + 25a^2 + b^2 - a^2b^2 = 0 \\ b^2x_T^2 + a^2y_T^2 - 9b^2x_T - 9a^2y_T + 20a^2 - 10b^2 = 0 \end{cases}$$

Al restar ambas ecuaciones se obtiene $y_T = \frac{11b^2}{a^2}x_T + 5 + \frac{11b^2}{a^2} - b^2$

Remplazamos en la ecuación general de la elipse:

$$b^2x_T^2 + 2b^2x_T + b^2 + a^2(y_T - 5)^2 - a^2b^2 = 0$$

$$b^2x_T^2 + 2b^2x_T + b^2 + a^2(\frac{11b^2}{a^2}x_T + 5 + \frac{11b^2}{a^2} - b^2 - 5)^2 - a^2b^2 = 0$$

Al sustituir los valores de a y b, y agrupar términos semejantes se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$(25.673{,}91)x_T^2 - 58.578{,}26x_T + 33.137{,}07 = 0$$

Cuyas soluciones aproximadas son:

$x_{T1} = 1{,}037, \qquad y_{T1} = 1{,}536$

$x_{T2} = 1{,}24, \qquad y_{T2} = 8{,}385$

Estos resultados son las coordenadas de los puntos de tangencia, con esta información quedan determinadas las ecuaciones de las dos rectas tangentes $L_1 y\ L_2$ que pasan por el punto exterior $Q(10, 4)$:

$$m_1 = \frac{y_{T1} - 4}{x_{T1} - 10} = 0{,}275$$

$L_1: y = 0{,}275x + 1{,}25$

$$m_2 = \frac{y_{T2} - 4}{x_{T2} - 10} = -0{,}50$$

$L_2: y = -0{,}5x + 9$

C35.

La ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} - y^2 = 1$.

C36.

a) Para identificar de qué cónica se trata, es necesario completar cuadrados y encontrar su ecuación cartesiana:

$$\frac{(x+2)^2}{2^2} - \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1$$

Por lo tanto se trata de una hipérbola equilátera con semieje real $a = 2$, semieje imaginario: $b = 2$, eje focal $y = -2$, distancia focal $c = 2\sqrt{2}$, su centro es $C(-2,-2)$, los focos $F_1(-4{,}82,-2)$ y $F_2(0{,}82,-2)$, vértices $V_1(-4,-2)$, $V_2(0,-2)$, $V_3(-2,-4)$ y $V_4(-2,0)$, $|LR| = 4$, extremos del lado recto $B(-4{,}82\,,0)$, $B'(-4{,}82\,,-4)$ y $A(0{,}82\,,0)$ y $A'(0{,}82\,,-4)$.

Ecuaciones de las asíntotas: $y = x$; $y = -x - 4$.

b) El foco de menor abscisa es $F_1(-4{,}82,-2)$, y los extremos del lado recto correspondientes son $B(-4{,}82\,,0)$ y $B'(-4{,}82\,,-4)$.

Se deriva implícitamente la ecuación de la hipérbola para determinar los vectores directores de las rectas L_1 y L_2.

$$2x - 2y\,y' + 4 - 4y' = 0$$

$$y' = \frac{x+2}{y+2}$$

Sea L_1 la recta tangente en B, luego su pendiente es $y' = \frac{-4{,}82+2}{0+2} = -\sqrt{2}$, por lo tanto $\boldsymbol{d_{L1}} = (1,-\sqrt{2})$.

Sea L_2 la recta tangente en B', luego su pendiente es $y' = \frac{-4{,}82+2}{-4+2} = \sqrt{2}$, por lo tanto $\boldsymbol{d_{L_2}} = (1,\sqrt{2})$.

El ángulo comprendido entre las rectas se calcula como $cos(\theta) = \frac{\boldsymbol{d_{L1}} \cdot \boldsymbol{d_{L2}}}{\|\boldsymbol{d_{L1}}\|\,\|\boldsymbol{d_{L2}}\|}$

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$$

$$\theta = 109°28'16{,}4''$$

C37.

La ecuación de la hipérbola es $\frac{(x-3)^2}{64} - \frac{(y-2)^2}{36} = 1$, cuyos elementos son:

Centro: $C(3,2)$; Focos: $F_1(13{,}2)$, $F_2(-7,2)$; vértices: $V_1(11,2)$, $V_2(-5,2)$, $V_3(3,8)$, $V_4(3,-4)$;$|LR| = 9$; Puntos extremos del lado recto: $A(-7\,,6.5)$, $A'(-7\,,-2.5)$ $B(13\,,6.5)$ y $B'(13\,,-2.5)$;

Ecuaciones de las asíntotas: $y = \frac{3}{4}x - 1/4$; $y = -\frac{3}{4}x + 17/4$.

C38.

a) La cónica es una hipérbola de ecuación cartesiana $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

Centro: $C(2,2)$; focos: $F_1(7{,}2)$, $F_2(-3,2)$; vértices: $V_1(2,5)$, $V_2(2,-1)$ $V_3(6,2)$, $V_4(-2,2)$; $|LR| = 4.5$; extremos del lado recto $A(7;4{,}5)$, $A'(7;-0{,}25)$, $B(-3;4{,}5)$y $B'(-3;-0{,}25)$; asíntotas: $y = \frac{3}{4}x + 1/2$, $y = -\frac{3}{4}x + 7/2$.

b) El ángulo comprendido entre las rectas tangentes a la cónica en los puntos de intersección con L_1 es $\theta \approx 86{,}3°$.

C39.

La ecuación de la hipérbola es $\frac{(x-0.5)^2}{2.86} - \frac{(y-1)^2}{3.39} = 1$, de la cual se deducen las ecuaciones de las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $Q(0,6)$:

L_1: $y = -2.48\,x + 6$

L_2: $y = 4.41\,x + 6$

C40.

La ecuación de una hipérbola con centro en $C(h,k)$,y eje focal paralelo al eje y *es* $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$

Por definición el lado recto es la cuerda focal perpendicular al eje focal, por lo tanto si evaluamos la ecuación de la cónica en la ordenada del foco $(h, c+k\,)$, se obtienen las abscisas de los extremos del lado recto:

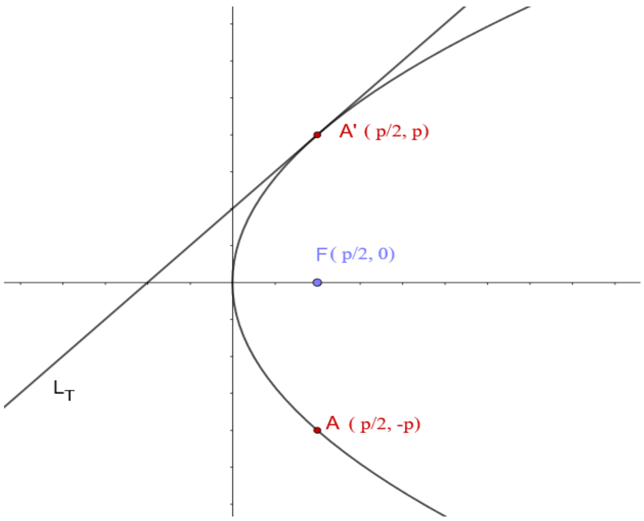
$A(h + \frac{b^2}{a}\,, c + k)\,,\ A'(h - \frac{b^2}{a}\,, c + k)\,.$

Luego $|LR| = \|\boldsymbol{AA'}\| = 2\,\frac{b^2}{a}$

C41.

Parábola:

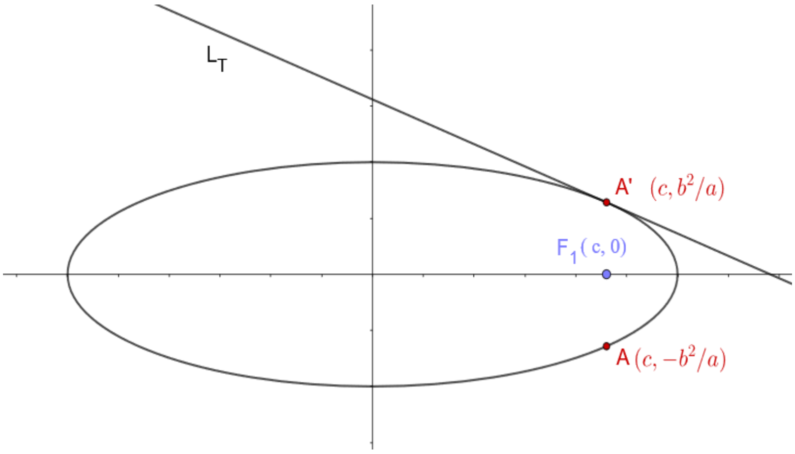
Sea una parábola de ecuación $y^2 = 2px$, tal como se indica en la figura de análisis.



La pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la misma está dada por: $y' = \frac{p}{y}$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente a la elipse en los puntos extremos del lado recto será 1 y -1, según el extremo del lado recto que se considere.

Elipse

Sea una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, tal como se indica en la figura de análisis.

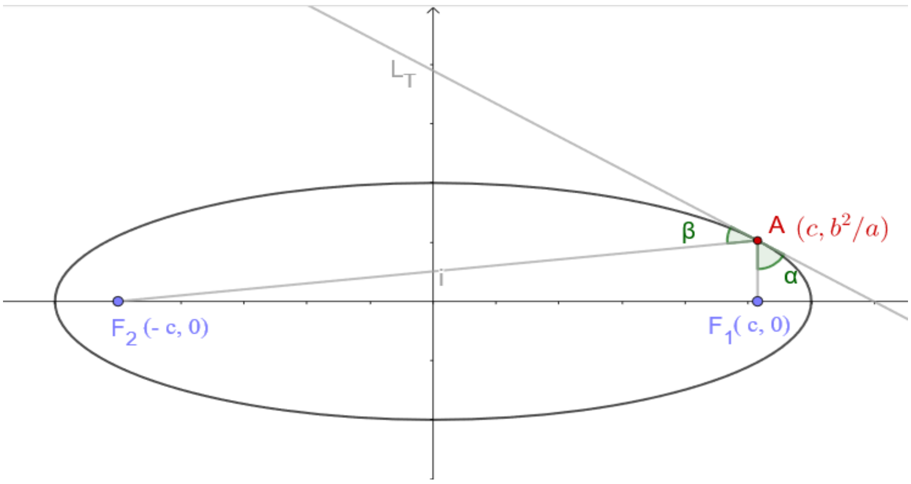


La pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la misma está dada por: $y'=\frac{-xb^2}{ya^2}$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en los puntos extremos del lado recto de una elipse será $\frac{c}{a}$ y $-\frac{c}{a}$, según el extremo del lado recto que se considere.

Hipérbola

Se realiza un análisis similar a los anteriores y se concluye que la pendiente de la recta tangente en los extremos del lado recto de una hipérbola será $\frac{c}{a}$ y $-\frac{c}{a}$, según el extremo del lado recto que se considere.

C42.



Sea L_T la recta tangente a la elipse en el extremo del lado recto correspondiente al foco $F_1(c,0)$, en particular $A(c,b^2/a)$. Se dirige un haz de luz que sale del foco F_2. El objetivo es demostrar que los ángulos de incidencia y reflexión α y β respectivamente que forma la recta tangente con los rayos y cada uno de los focos de la elipse, son congruentes.

El ángulo α, se puede calcular a partir de $\cos\alpha = \frac{\langle \boldsymbol{d_L}, \boldsymbol{AF_1} \rangle}{\|\boldsymbol{AF_1}\| \|\boldsymbol{d_L}\|}$ y el ángulo β a partir de la expresión: $\cos\beta = \frac{\langle \boldsymbol{d_L}, \boldsymbol{AF_2} \rangle}{\|\boldsymbol{AF_2}\| \|\boldsymbol{d_L}\|}$.

Se tienen como datos la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. También se conoce el centro $C(0,0)$ y las coordenadas de los focos $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$.

La ecuación de la recta tangente en A será $L_T: y - \frac{b^2}{a} = m(x-c)$, donde m es igual a y' evaluada en A.

Al derivar implícitamente y despejar la variable y' de la ecuación de la elipse se tiene $y' = \frac{-xb^2}{ya^2}$. Ahora se puede determinar $m = y'_A$, es decir $m = -\frac{c}{a}$

Luego un vector director de dicha recta será $\boldsymbol{d_L} = (a, -c)$ y determinamos los vectores $\boldsymbol{AF_1} = (0, -b^2/a)$ y $\boldsymbol{AF_2} = (-2c, -b^2/a)$.

Con la información y los datos que se han detallado se debe probar que α y β son congruentes, o lo que es equivalente:

$\| \boldsymbol{d_L} \| \cos\alpha = \| \boldsymbol{d_L} \| \cos\beta$

Se desarrolla el primer miembro:

$$\| \boldsymbol{d_L} \| \cos\alpha = \frac{\langle \boldsymbol{d_L}, \boldsymbol{AF_1} \rangle}{\| \boldsymbol{AF_1} \|} = \frac{\langle (a,-c), (0,-b^2/a) \rangle}{\sqrt{(-b^2/a)^2}} = \frac{cb^2/a}{b^2/a} = c$$

Para el desarrollo del segundo miembro, se utiliza como vector director de la recta tangente a $-\boldsymbol{d_L} = (-a, c)$, y a $\| \boldsymbol{AF_2} \| = \frac{2a^2-b^2}{a}$, que se deduce de la definición de elipse donde $\| \boldsymbol{AF_2} \| + \| \boldsymbol{AF_2} \| = 2a$.

$$\| \boldsymbol{d_L} \| \cos\beta = \frac{\langle \boldsymbol{d_L}, \boldsymbol{AF_2} \rangle}{\| \boldsymbol{AF_2} \|} = \frac{\langle (-a,\ c), (-2c, -b^2/a) \rangle}{\frac{2a^2-b^2}{a}} = \frac{2ac - cb^2/a}{\frac{2a^2-b^2}{a}} = \frac{c\ \frac{2a^2-b^2}{a}}{\frac{2a^2-b^2}{a}} = c$$

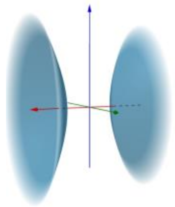
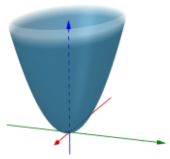
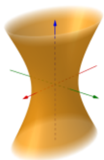
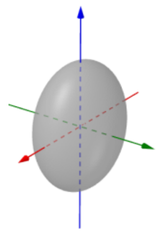
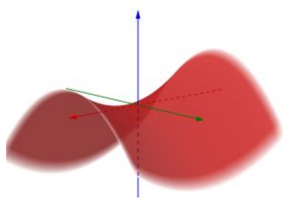
Se concluye que $\| \boldsymbol{d_L} \| \cos\alpha = \| \boldsymbol{d_L} \| \cos\beta$, es decir, α y β son congruentes.

3.8 SUPERFICIES

C43.

Ver Capítulo 5 de *Geometría Analítica para Ciencias e Ingeniería,* [*Raichman y Totter, 2016*].

C44.

Ecuación	**Nombre**	**Clasificación**	**Representación gráfica de la superficie**
$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$	Hiperboloide de dos Hojas	**SCCC**. Superficie Cuádrica con centro	
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$	Paraboloide Elíptico	**SCSC**. Superficie Cuádrica sin centro	
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$	Hiperboloide de una Hoja	**SCCC**. Superficie Cuádrica con centro	
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$	Elipsoide	**SCCC**. Superficie Cuádrica con centro	
$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z$	Paraboloide Hiperbólico	**SCSC**. Superficie Cuádrica sin centro	

C45.

a) Elipsoide de semiejes a=8, b=4, c=5

b) Hiperboloide de una hoja de semiejes a=3, b=3, c=2.5

c) Hiperboloide dos hojas de semiejes a=1.5, b=2, c=1.5

d) Paraboloide elíptico de semiejes a=1.75, b=1.25, c=4

e) Paraboloide hiperbólico de semiejes a=1.5, b=1.5, c=3

C46.

Se selecciona el origen de coordenadas en el centro de la elipse y se representa la *semielipse* solicitada en el plano *yz*:

Con este sistema de referencia seleccionado la *semielipse* se corresponde con a=50m; b=40m; c=30m.

Luego la ecuación de la *semielipse* en coordenadas cartesianas será:

$$\frac{y^2}{2500} + \frac{z^2}{1600} = 1 \quad \forall\, z \geq 0$$

La cubierta solicitada es un *semielipsoide de revolución* con eje de revolución *z*, cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{2500} + \frac{y^2}{2500} + \frac{z^2}{1600} = 1 \quad \forall\, z \geq 0$$

C47.

Ecuación vectorial paramétrica de la curva proyección sobre el plano *xy* : (x,y,z)=(0.67+1.33 cos(t), -1.33 sen(t),0), t Ɛ [0,2π)

C48.

Recurso Geométrico Interactivo *RGI – Paraboloide Hiperbólico*, en el Capítulo 6 del *Libro Interactivo Geometría Dinámica.*

3.9 COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

C49.

La ecuación de la elipse en las condiciones indicadas es: $\rho = \frac{4}{1+0.8cos\theta}$.

C50.

La ecuación de la parábola en las condiciones indicadas es: $\rho = \frac{4.4}{1-sen\theta}$.

C51.

Ver Capítulo 5 de *Geometría Analítica para Ciencias e Ingeniería,* [*Raichman y Totter, 2016*].

C52.

d) $\rho = 10$ Cilindro circular recto

e) $\theta = \pi/6$ Semiplano en el primer y quinto octante.

f) $z = 10$ Plano paralelo al plano xy

C53.

a) $2x+5y+8z=0$

b) $2(sen\varphi cos\theta\ ) + 5(sen\varphi sen\theta) + 8(cos\varphi) = 0$

3.10 ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN DOS Y TRES VARIABLES

C54.

La cónica es una hipérbola y la ecuación en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

C55.

La cónica es una hipérbola y la ecuación en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$-3(x' - 1/6)^2 + 4\,(y' + \frac{5}{8})^2 + 22.5 = 0$$

C56.

A partir de la información del vértice y el foco se determina el parámetro p de la parábola:

$$\frac{p}{2} = \|\boldsymbol{VF}\|$$

$$\mathrm{p} = 2.\,\|(2{,}1)\|$$

$$p = 2\sqrt{5}$$

La dirección de los ejes x' y x'' está dada por el vector $\boldsymbol{b_1} = (2, 1)$.

La dirección de los ejes y' e y'' está dada por el vector: $\boldsymbol{b_2} = (-1{,}2)$.

Con esta información se obtienen los vectores unitarios en ambas direcciones que serán las columnas de la matriz $\boldsymbol{P}$ de transformación ortogonal de coordenadas.

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{\boldsymbol{b_1}}{\|\boldsymbol{b_1}\|} = \frac{(2, 1)}{\sqrt{5}}$$

$$\boldsymbol{u_1} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\boldsymbol{u_2} = \frac{\boldsymbol{b_2}}{\|\boldsymbol{b_2}\|} = \frac{(-1, 2)}{\sqrt{5}}$$

$$\boldsymbol{u_2} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Luego $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, verificando que $|\boldsymbol{P}| = 1$.

El eje focal de la parábola coincide con el eje x'', por lo que la ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas $x''y''$ es:

$$y''^2 = 4\sqrt{5}\,x'' \qquad [1]$$

Para determinar las ecuaciones de traslación, se necesitan las coordenadas del vértice $V(2{,}1)$ en el sistema de coordenadas $x'y'$.

La ecuación de transformación de coordenadas está dada por $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'$, a partir de ella se obtienen las coordenadas del vértice en el sistema $x'y'$ como $\mathbf{X}' = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$, obteniendo que:

$V_{x'y'}(\sqrt{5}, 0)$

Luego las ecuaciones de traslación del sistema $x''y''$ respecto de $x'y'$ son:

$$\begin{cases} x'' = x' - \sqrt{5} \\ y'' = y' \end{cases} \qquad [2]$$

Sustituyendo [2] en [1], se obtiene la ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas x'y':

$$y'^2 = 4\sqrt{5}\,(x' - \sqrt{5})$$

Operando algebraicamente:

$$y'^2 - 4\sqrt{5}x' + 20 = 0 \qquad [3]$$

Analizando la ecuación de la cónica [3] en el sistema $x'y'$ y relacionando este resultado con el teorema de los ejes principales en $\mathbb{R}^2$, obtenemos que $f = 20$ y los valores de propios de la matriz $\boldsymbol{A}$ son $0\ \ y\ \ 1$.

Por lo tanto $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

También se deduce la matriz $\boldsymbol{K}' = [-4\sqrt{5} \quad 0]$.

Conociendo las matrices $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{D}$, obtenemos la matriz $\boldsymbol{A}$ a partir de la ecuación

$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Se calcula la matriz $\boldsymbol{K}$, a partir de la ecuación $\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K}\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{K} = [-8 \quad -4]$$

Conociendo las matrices $\boldsymbol{A}\ y\ \boldsymbol{K}$, y el término independiente $f = 20$, se determina una ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas xy :

$$\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}xy + \frac{4}{5}y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$$

C57.

La superficie cuádrica es un paraboloide hiperbólico, y su ecuación en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$y'^2 - z'^2 = x'.$$

C58.

La superficie es un hiperboloide de dos hojas, y su ecuación en un nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{-x''^2}{\frac{156}{25}} - \frac{y''^2}{\frac{39}{5}} + \frac{z''^2}{\frac{52}{5}} = 1.$$

6. REFERENCIAS

6.1. REFERENCIAS GENERALES.

Downs, J.W.; *Practical Conic Sections* Dover Publications. Edición 2003.

Fuller, G., Tarwater, D.; *Geometría Analítica*. Addison Wesley Iberoamericana. Edición 1999.

GeoGebra. https://www.geogebra.org *Programa Dinámico para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Fecha de consulta: 10-01-2020.

Raichman, S., Totter, E.; (2016). *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*. Edición digital. Universidad Nacional de Cuyo. 220 páginas. Fecha de edición: Febrero de 2016. ISBN: 978-987-575-125-5. Dirección URL del libro: http://bdigital.uncu.edu.ar/7224. Fecha de consulta del libro: 10-01-2020.

Raichman, S., Totter, E., Codina, F., Fitt, G.; (2020). *Geometría Dinámica para Ciencias e Ingenierías*. Libro Interactivo GeoGebra para el estudio de la Geometría Analítica para Ciencias Exactas, Ingeniería y Arquitectura. https://www.geogebra.org/m/zsvdbqju. Fecha de consulta del libro: 10-01-2020.

Trias Pairó, J.; *Geometría para la Informática Gráfica y CAD*. Editorial Alfaomega. Edición 2005.

6.2. REFERENCIAS ASOCIADAS AL MODELO PEDAGÓGICO.

CONFEDI, (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina*. "Libro Rojo de CONFEDI" - Aprobado por la Asamblea del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina Rosario - 1 de junio de 2018.

Felder R., Brent S.; (2003). *Learning by doing*. En: Chemical Engineering Education. [Online]. 3 (4). 282-283. http://www.ncsu.edu/felder-puiblic/Columns/Active.pdf. [Aug 1, 2018].

Felder R., Brent R.; (2007). *Cooperative Learning*. En: Active Learning: Models from the Analytical Sciences, P.A. Mabrouk, (ed.), Chapter 4. American Chemical Society. Symposium Series 970.

Molina V., Prieto Castillo D.; (1997). *El Aprendizaje en la Universidad*. Editorial de la Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza, Argentina.

Perkins D.; (1999). *¿Qué es la Comprensión?* En: La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la Práctica. Compiladora: Stone Wiske, M. Editorial PAIDÓS. Colección Redes de Educación. Buenos Aires, Argentina.

Raichman, S., Cerezo, V., Barbini, M., (2017). *Integración de ayudantes alumnos en las Aulas Taller de Geometría Analítica*. IX Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería (EnIDI 2017). Eds.: Gitto J., Mercado G., Zaradnik R. Vol. 1. pp. 205-209, ISBN 978-987-575-185-9.
http://enidi.frm.utn.edu.ar/index.php/actas-enini-2017/Mendoza.

Raichman, S., Pacini, E., (2017). *Intervención educativa de articulación entre las asignaturas Introducción a la Programación y Geometría Analítica*, IX Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería (EnIDI 2017), Eds.: Gitto J., Mercado G., Zaradnik R. Vol. 1. pp. 194-198, ISBN 978-987-575-185-9. http://enidi.frm.utn.edu.ar/index.php/actas-enini-2017/ Mendoza.

Raichman, S., Sabulsky, G., Totter, E.; (2013). *Estrategias para el desarrollo de innovaciones educativas basadas en la utilización de Tecnologías de la Información y Comunicación*. En "Estrategias para el uso de tecnologías de información y comunicación en los procesos de aprendizaje", Orta, M., Verdejo, P (eds.). Innova Cesal, México.

Raichman, S., Mirasso, A.; (2018). *Modelos pedagógicos para el aprendizaje complejo y la formación en competencias en carreras de Ingeniería*. Ingeniería – Revista Académica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán, Vol. 22, No. 3, pp. 15-25 ISSN: 2448 - 8364.

http://www.revista.ingenieria.uady.mx/ojs/index.php/ingenieria/article/view/127

Raichman S., Totter E. (2010). *Modelo pedagógico de estrategias presenciales y virtuales para el desarrollo inicial del pensamiento complejo*. Innova Cesal. http://www.innovacesal.org/innova_public/archivos/publica/area06_tema01/108/archivos/PCC_ING_05_2010.pdf [Julio 3, 2018].

Raichman, S., Totter, E., (2008). *Aula-Taller de Geometría Analítica en Carreras de Ingeniería*. Latin American and Caribbean Journal of Engineering Education, Vol. 2, Nº 1, pp. 7-12, LACJEE, ISSN 1935-0295.

Raichman S. Totter, E. Gargiulo H., Videla D.; (2014). *Aula-taller de Geometría Analítica en el marco de formación basada en competencias y su impacto en la permanencia de estudiantes de primer año en ingeniería,* Cuartas Jornadas Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas, IPECYT 2014, Eje 3. ISBN: 978-987-3662-01-0, http://redipecyt.fceia.unr.edu.ar/trabajos/E3069-Raichman.pdf. Univ. Nac. Rosario.

Raichman, S., Totter, E., Gargiulo, H., Videla, D., (2014). *Aula-taller de Geometría Analítica en el marco de formación basada en competencias y su impacto en la permanencia de estudiantes de primer año en ingeniería*. Cuartas Jornadas Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas, IPECYT 2014, Eje 3. ISBN: 978-987-3662-01-0, Univ. Nac. De Rosario.

Raichman, S., Totter, E., Videla, D., Collado, L., Codina, F., Molina, G., Cascone, I., (2018). *Recursos didácticos para el aprendizaje complejo de la Geometría Analítica*. I Jornada de Divulgación de la Carrera de Ingeniería Civil, Mendoza. http://bdigital.uncu.edu.ar/10949. Fecha de consulta del artículo: 14-10-18.

Totter, E., Raichman, S.; (2009). *Creación de espacios virtuales de aprendizaje en el área Ciencias Básicas en carreras de Ingeniería*. Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, ISSN 1850-9959. Vol. 4, pp. 40-46, http://teyet-revista.info.unlp.edu.ar/numero-4.htm. La Plata, Octubre de 2009.

Geometría Analítica

para Ciencias e Ingenierías

Actividades para el Aprendizaje

EDICIÓN DIGITAL

ISBN: en trámite.

Mendoza, República Argentina, Febrero de 2020.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

para ciencias e ingenierías

ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE

Espacio para
el código de
barras